

Юлия Кафтанова

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ



Часть 3

Моделирование аномальных
и экстраординарных природных
и техногенных процессов

- Почему ползут камни в Долине Смерти
- Ударные волны, модель цунами в океане
- Вихри в атмосфере, смерчи и торнадо
- Модель колебаний натянутой струны

Юлия Кафтанова

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Часть 3

Моделирование
аномальных и экстраординарных
природных и техногенных
процессов



ЧП Издательство «Новое слово»
Харьков
2009

УДК 531.0
ББК 22.311
К-305

Free preview: BarcodeRobot.com 2004-2015 ©
ISBN 978-966-2046-62-5



webois K.305
ORCID 0000-0003-4306-1738

Кафтanova Ю. В.

К-305 Специальные функции математической физики. Научно-популярное издание. — Х.: ЧП Издательство «Новое слово», 2009. — 596 с.

ISBN 978-966-2046-62-5

Издание рассматривает метод рекуррентных отношений для специальных функций математической физики и особенности использования специальных функций для моделирования различных природных и техногенных процессов.

Часть 1 рассматривает цилиндрические функции Бесселя и Неймана. Часть 2 изучает поведение сферических функций и ортогональных полиномов. Приводятся авторские программы вычислений, написанные на языке JavaScript.

В части 3 изучается применение специальных функций для математического моделирования природных катаклизмов — цунами, землетрясений, торнадо, смерчей и для исследования поведения движущихся камней в Долине Смерти, США. Также строится математическая модель звучания и управления электрогитары с использованием современного аппарата специальных функций математической физики.

Рассчитано не только на специалистов-математиков, но и на широкий круг подготовленных читателей.

УДК 531.0
ББК 22.311

© Кафтanova Ю.В., 1992-2009
© ЧП Издательство «Новое слово», 2009

ISBN 978-966-2046-62-5

Оглавление

Введение	4
Глава 1. «Живые камни» в Долине Смерти, США	
§ 1. Долина Смерти — природный феномен	6
§ 2. Геологические понятия сбросовых структур и рифтовых долин (грабенов)	11
§ 3. Математическая модель, описывающая природу самопроизвольного движения камней по дну сухого озера в Долине Смерти, США	19
Глава 2. Свободно распространяемые ударные волны в сплошных средах	
§ 1. Цунами — страшная разрушительная аномалия	39
§ 2. Математическая модель, описывающая поведение цунами	44
§ 3. Модель поведения приповерхностных сейсмических волн — явление землетрясения	64
§ 4. Модель формирования волн цунами	76
§ 5. Модель распространения волн цунами	107
§ 6. Ударные волны в атмосфере Земли	133
Глава 3. Вихревые ударные волны в атмосфере	
§ 1. Торнадо и смерчи — вихревые природные аномалии	140
§ 2. Модель формирования и поведения торнадо	147
§ 3. Поведение вихрей, смерчей и торнадо	162
Глава 4. Управляемые колебания натянутых струн *	
§ 1. Поведение натянутой струны современных музыкальных инструментов	182
§ 2. Формирование звука современной электрогитары	193
Заключение	234

**Написано нормальным языком
для нематематиков**

*) Глава 4 приводится в сокращенном и строгом академическом варианте

Глава IV

Управляемые колебания натянутых струн

§ 1. Поведение натянутой струны современных музыкальных инструментов

Длительное время загадка звучания струн музыкальных инструментов не давала покоя математикам — пока, наконец, не было выведено дифференциальное волновое уравнение и не исследованы его собственные значения и собственные функции.

Оказалось, что с высочайшей степенью точности колебания гитарной (или любой другой) струны акустического инструмента могут быть описаны тригонометрическими функциями синуса и косинуса, а сами колебания представлены через разложения в ряды Фурье по тригонометрическим функциям.

Эта математическая модель поясняет явление резонанса, когда колебания струны приближаются к собственным колебаниям волнового уравнения. Поэтому уже на строго научной основе гитаристов учили делать щипки, разделив струну пополам, на одну четверть и далее в отношении произвольной степени двойки и перемещать место контакта струны и пальцев.

Место контакта пальцев или медиатора исполнителя со струной стало играть решающую роль для филигранной техники исполнения.

Вблизи середины исполнитель извлекает мягкие и напевные звуки. Удаляя точку контакта от середины ближе к подставке (одна четверть струны), исполнитель извлекает наиболее светлые, яркие и четкие звуки.

У самой подставки (в месте крепления струн и корпуса инструмента) исполнитель извлекает причудливые, резкие и жесткие звуки, в которых присутствует большое число элементов ряда разложения Фурье — обертонов.

Начальная скорость воздействия на струну также имеет решающее — уже научно подтвержденное значение (краевая задача Коши для волнового уравнения в клас-

сической форме). Быстрый щипок дает резкий звук с быстрым угасанием. Извлечение звука медиатором, параллельным линии струны, дает ясный и отчетливый звук. Игра пальцами способствует мягкости и завуалированности звучания и так далее.

Все было бы хорошо, если бы не адское изобретение XX века — электрическая гитара, мятежное и пламенное дитя научно-технической революции. Как звучит электрогитара, объяснить невозможно — ее нужно просто услышать в руках мастера. Электрогитару можно или страстно любить, или ненавидеть, но невозможно не замечать.

Сама по себе, без усилителя, электрическая гитара не звучит (точнее, издает звуки не лучшего качества). Для нее не писали свои произведения прославленные классики прошлых веков — тем не менее, лучшие гитаристы мира сегодня исполняют и классические произведения. В консерватории не учат игре на электрогитаре — но современные электро-гитаристы демонстрируют такие пассажи, которые не снились обычным гитаристам.

Электрогитара не возбуждает акустические колебания в пустотелом корпусе, которые слушает восхищенный и притихший зал. Даже если внутрь корпуса акустической гитары поместить микрофон, эта техническая новация не превратит ее в электрогитару, хотя ее звук улучшит.

В электрогитаре под каждой струной расположены звукосниматели. Это не микрофоны, а электромагниты, находящиеся под струнами. На звукосниматели подается очень слабое электрическое напряжение.

Когда металлическая струна вибрирует над звукоснимателем, она модулирует генерируемое им поле и подает на выход очень слабые переменные электрические токи. Колебания электрических токов соответствуют колебаниям струн электрогитары.

Таким образом, если струна совершает 440 колебаний в секунду, она генерирует сверхслабый переменный ток с частотой 440 Гц.

Далее слабые токи подаются в предусилитель, предназначенный для обработки сверхслабых сигналов. Затем сигнал поступает в обычный усилитель и может выводиться уже в колонку или в наушники — это обеспечивает,

например, так называемый комбик (два усилителя плюс колонка в одном корпусе), который имеют все уважающие себя гитаристы. Только так гитарист может реально услышать, что же он сыграл на самом деле.

Если гитарист играет на концерте, потребуется еще один — третий усилитель мощности, который рассчитан на большой концертный зал или даже на площадь огромного мегаполиса. Чаще всего на концерте гитарист слушает собственный живой звук, идущий из колонок, повернутых на сцене непосредственно к самому исполнителю.

Сразу оговорюсь — я не умею играть на электрогитаре, хотя научиться пыталась. За моей спиной 10 лет классического музыкального образования и обучения игры на фортепиано, подкрепленные опытом выступлений на сцене. Сегодня я — счастливый обладатель синтезатора с динамической клавиатурой, на котором можно играть и как на родном пианино, и как на органе и на электронном синтезаторе, и даже как на ударной установке.

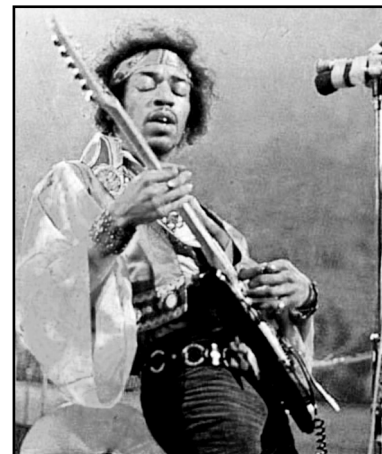
Но я люблю звучание электрогитары. Для меня электрогитара в руках мастера была и остается непостижимым совершенством, наиболее органичным сплавом современных технологий, прогрессивных научных достижений и квинт-эссенцией мастерства человека. Я всегда стремилась к построению математической модели звучания электрогитары в руках гитаристов экстра-класса, играющих рок-н-ролл.

Я могла бы много и долго писать об электрогитаре и современных гитаристах, но остановлюсь только на четырех наиболее любимых и уважаемых мною исполнителях.

На их примере я кратко рассмотрю историю развития гитарных соло в направлении хард-рока, ритм-энд-блюза и классического хэви-металл — того, что британские рок-музыканты упорно именуют **современным рок-н-роллом**. Одновременно будут проведены сравнения с гитаристами, играющими на классической акустической гитаре.

Джими Хендрикс по праву считается величайшим гитаристом XX века. Он не просто синтезировал в музыке самые разные и противоречивые направления, но и создал в 60-е годы XX века свой собственный неповторимый и уникальный стиль. На обычной гитаре Fender Stratocaster в комбинации с новейшими на тот момент времени

электронными примочками он буквально сорвал крышу огромному количеству человек и не дал никому опомниться до сегодняшнего времени.



Его сольная карьера продолжалась всего четыре года, но Джими Хендрикс полностью перевернул все представления об электрической гитаре, введя новые средства, технику исполнения и манеру представления на сцене.

Даже после смерти (от передозировки наркотиков) его альбомы и композиции продолжают издаваться и пользуются популярностью. Он является истинной легендой и одним из основоположников современной рок-музыки.

Остались фотографии и видеозаписи, ноты и фонограммы выступлений выдающегося гитариста. Но проблема состояла в том, что Джими играл вдохновенно, интуитивно и не мог объяснить, как именно он играет пассажи и почему извлекает из гитары немислимые звуки. Он умер слишком рано и унес с собой тайну особого звучания электрогитары — потомкам осталась только его музыка.

Гитаристы, играющие современный рок-н-ролл, долго и безуспешно пылись воспроизвести фирменное звучание его электрогитары. Это не получалось даже у мастеров мирового уровня. В результате каждый великий гитарист сформировал собственное звучание своего инструмента.

Тайна звука Хендрикса не давала гитаристам покоя. В узких профессиональных кругах гитаристы готовы были продать душу дьяволу за **ТАКОЕ** звучание инструмента и искренне верили, что Джими именно так и сделал. 185



Очень интересным гитаристом является Джими Пейдж — гитарист группы Led Zeppelin, которая является основоположником стиля классического хэви-металл. Пейдж — выдающийся студийный гитарист, который мастерски использовал технические средства, в результате чего его гитара звучала ярче и выразительней, чем на сцене.

Этот очень техничный и грамотный гитарист совмещал на фонограммах звучание нескольких гитарных партий, а также звучание электрической и акустической гитары. На живых концертах звучание гитары ощутимо проигрывало студийным альбомам.

Джими опередил свое время и как музыкант, и как продюсер. Группа Led Zeppelin прекратила существование после смерти ударника в авиа-катастрофе.

Джими Пейдж выпустил несколько сольных альбомов и успешно занялся продюсерской деятельностью.

Ричи Блэкмор — одна из лучших гитар и один из наиболее выдающихся гитаристов мира конца XX в.

Гитарист группы Deep Purple и лидер собственного проекта Rainbow.

Прекрасное очень ровное и одновременно мощное звучание и в студии, и на живых концертах. Высокая техничность исполнения и спокойствие на сцене.

Его мастерство росло и совершенствовалось постоянно, из года в год — кропотливая и непрерывная работа над своим собственным уникальным звуком. В альбоме 1995 го-



да Блэкмор исполнил в том числе обработку классических композиций в переложении для электрогитары.

Ричи Блэкмор относится к гитаристам такого класса, звучание гитары которого в конце XX века не могли воспроизвести другие гитаристы. Как и гитару Джими Хендрикса, гитару Блэкмора можно было мгновенно узнать по специфическому характеру звучания. Ричи не продавал душу дьяволу, не пытался разгадать чужие тайны и в XXI веке спокойно отошел от дел, оставив свою музыку.

И, наконец, гитарист группы Queen — Brian May (Брайан Мэй). Гитарист постоянно оставался в тени вокалиста группы. Хуже того — чтобы придать Queen более попсовое и менее рок-н-рольное звучание, его гитарные соло и даже вокал продюсеры частенько приглушали.



Брайан не записывал сольных альбомов, оставаясь в тени и будучи до конца верным группе — даже после смерти знаменитого на весь мир солиста группы Queen.

В узких профессиональных кругах рейтинг Брайана оставался высоким. Это гитарист, всегда играющий изысканные соло и забойный рок-н-ролл с одинаковой легкостью и входящий в двадчатку лучших гитаристов.

Его гитара и вокал звучат в кинофильме «Горец». О нем очень мало пишут. Его песни распевают многие, не зная, что их авторство принадлежит Брайану Мэю.

Мэй неплохо играет и в студии, и на живых концертах. Он вышел на сцену и играл даже в 2008 году.

На примере его гитары я буду выписывать модель формирования звука электрогитары и управляемых колебаний ее натянутой струны.

Специалисты, которые электрифицировали свои первые гитары в начале XX века, стремились максимально приблизить звучание к акустической гитаре. Но, к счастью, они потерпели сокрушительное поражение и не могли себе представить, что будет выделять с инструментом на фестивале Вудсток Джими Хендрикс.

Все попытки получить звук акустической гитары у электрического инструмента терпели крах, так как механизм формирования звучания электрогитары концептуально отличается от механизма звучания акустической гитары.

У акустической гитары звучит пустотелый корпус, который резонирует в такт и с частотой звучания натянутых струн. Ее колебания передаются через воздух. Ее звучание описывается простейшими волновыми уравнениями и элементарными тригонометрическими функциями.

У электрической гитары принцип регистрации звука основан в первую очередь на явлениях электро-магнитного резонанса. А электрические явления описываются обобщенными интегральными уравнениями Максвелла.



Математическая модель явлений электро-магнитного резонанса носит **принципиально отличный** от акустики характер и моделируются не тригонометрическими функциями, а специальными функциями математической физики. Хотя сами струны электрогитары продолжают звучать, подчиняясь в первую очередь законам акустики. Вот такая сложная картина получается — два типа уравнений.

Не каждый играющий на акустической гитаре исполнитель использует медиатор. Считается, что для извлечения звуков достаточно пальцев. Но исполнители, которые играют, например, на четырехструнной домре прима, активно используют медиатор для получения оригинальных и необычных звуков из, казалось бы, простого и незамысловатого акустического инструмента.

Харьковская консерватория имеет очень сильных домристов, которые потрясли меня аранжировками и феноменальными способностями извлекать при помощи медиатора из акустического инструмента совершенно необыкновенное звучание. Гитаристам стоит послушать харьковских исполнителей и посмотреть на их филигранную технику работы с медиатором — в первом ряду.

Для рок-гитариста медиатор — не менее важный и необходимый аксессуар. Зажатым между большим и указательным пальцем треугольным кусочком пластмассы рок-гитаристы берут аккорды и играют соло (кстати, Брайан Мэй играет монеткой, а не пластиковым медиатором).

В отличие от сидящих с акустической гитарой исполнителей, рок-гитаристы обычно стоят. Или же играют полужога. Потому что пространственные перемещения и принудительные вибрации корпуса электрогитары влияют в качестве **функций управления** на явления электро-магнитного резонанса и соответственно — на характер звучания электрического инструмента.

То, что практически не слышно на акустической гитаре, становится одной из наиболее характерных особенностей формирования нового звука — путем создания перегрузок звуковых каналов электрогитары внутри усилителей.

Даже если рок-гитарист играет на акустической гитаре, он все равно будет пытаться придать ее корпусу вибрации и перемещения, которые изменяют характер звучания на акустическом уровне, пусть и достаточно слабо.

У электрогитары есть еще одна интересная примочка — рычаг. Если на него надавить, длина струн уменьшится, и звук изменит тональность. Во время солирования гитаристы активно пользуются рычагом. Давить нужно с определенным усилием — корпус акустической гитары такого зверского обращения просто не выдержит.

Таким образом, электрическая гитара позволяет даже регулировать уровень натяжения струн — а значит, и длину струн во время их звучания. И это на фоне электромагнитного резонансного восприятия колебаний струны.

Гриф электрической гитары короче и тоньше. На ней используются более тонкие струны, а значит, и усилий для их прижатия к грифу требуется меньше. Это позволяет гитаристам не только играть левой рукой, но и свободно выполнять пространственные перемещения электрогитары.

Кроме того, в процессе исполнения гитарных соло длину струны можно изменять, производя подтяжку вверх и вниз и удлинение одной или нескольких струн — вплоть до полутона разницы.

Гитаристам становятся доступными вибрации струн, которые ранее использовали скрипачи и виолончелисты. Но выполняются они в поперечном (перпендикулярном натяжению струн), а не продольном направлении.

Гитаристы практически не используют чистый звук электрогитары. Чаще всего они играют на так называемых перегруженных каналах, в которых звук строго определенным образом искажается за счет внутренних электрических перегрузок. Он не хуже и не лучше чистых звуков — просто он другой.

Благодаря перегрузкам и особым приемам игры отсекаются пики и обертоны — звук на выходе формируется удивительно чистый, ровный и длительный. Его формирование на самой струне описывается всего несколькими членами ряда разложения Фурье, а то и одним-двумя доминирующими первыми членами ряда Фурье — остальные отсекаются аппаратурой. Так звучит несравненная гитара Ричи Блэкмора.

Для того, чтобы получить такой идеальный звук, гитаристу требуются десятилетия упорной работы. Это искажения, управляемые в том числе электроникой.

Если на электрогитаре ослабить нажим пальцев левой руки на струны на грифе, они вместо звонкого и яркого издадут блеклый звук, но продолжат немного звучать. Если продолжить играть с таким ослабленным нажимом, используя медиатор, звук превратится в необычный и странный. Если струны мягко отпустить — они сразу же перестанут звучать. На звук электрической гитары влияют даже такие нюансы, которые опять-таки связаны с феноменом электромагнитного резонанса.

Более того — на электрической гитаре можно играть, просто опуская пальцы левой руки на нужную позицию грифа и слегка ударяя при этом по струнам. Без участия правой руки. Конечно, такое можно проделать и на акустической гитаре — только результат будет плачевным.

Струна выводится из равновесия и мгновенно прижимается в том же самом месте — оригинальная краевая задача на колебания. Она моделируется через функции косинусов, а не посредством традиционных синусов.

Высочайшего мастерства в этой оригинальной технике звукоизвлечения достиг Джими Пейдж, входящий в первую пятерку лучших гитаристов. Одной рукой он мог играть на грифе гитары, а второй — на клавишном синтезаторе.

В 70-х и 80-х годах XX века многие гитаристы уделяли огромное внимание совершенствованию мастерства и техники звукоизвлечения на электрогитаре.

Но постепенно произошло значительное утяжеление хард-рока под влиянием направления трэш-металла.

Вместо филигранной техники звука гитаристы стали практиковать очень тяжелые и забойные риффы, напоминающие стрельбу из орудий и пулеметов. Новая техника требовала высокой техничности и мастерства, но это нельзя было назвать рок-н-роллом. Произошло то, что и должно было случиться — не каждый, даже самый преданный фанат, в состоянии был выдерживать такую музыку долго и слушать ее по миллиону раз подряд.

Начался некоторый кризис жанра. Одного звучания перегруженных до предела усилителей стало недостаточно. Конец XX века ознаменовался приходом рэпа и хип-хопа, который не очень успешно пытались приспособить под звучание рок-музыки, но и это не спасло ситуацию.

В самом начале XXI века многим гитаристам казалось, что они уже извлекли всё, что можно было только извлечь из электрогитары — но они забыли при этом о музыке.

Мне данная ситуация до боли напоминает свою ситуацию с прикладной математикой и специальными функциями — кстати, в этот же самый отрезок времени.

Так может быть, сегодня гитаристам нужно вспомнить, что они играют **МУЗЫКУ**, а электрогитара — не более чем инструмент для ее исполнения ???

Электрогитара предоставляет исполнителям широкие потенциальные возможности и открывает перед ними немыслимые горизонты. С ней можно сделать то, что не под силу другому подобному инструменту. И совсем не обязательно имитировать автоматные очереди или строительную площадку — эти звуки можно послушать в более подходящем месте. Или сделать это 2-3 раза.

Одними из наиболее сложных инструментов до возникновения электрогитары считались пианино и рояль. На фортепиано можно извлекать звуки самыми разными и оригинальными способами.

Гитарист экстра-класса один может заполнить полноценным звуком и музыкой не только концертный зал, но и огромную часть современного мегаполиса и удерживать аудиторию на пике внимания. Можно солировать перед любой аудиторией — от камерной до огромной (были бы микрофоны и усилители). Можно играть в группе, ансамбле, с оркестром, вокалистом и т. д.

Сегодня появился еще один инструмент — электрогитара. На практике она оказалась очень сложным инструментом, обладающим большим потенциалом.

...Только по официальным данным, на площадь Свободы в Харькове в сентябре 2008 года пришли и приехали со всего СНГ более 350 000 человек — два часа послушать классный вокал, современную электрогитару и отличные барабаны. Такого в Харькове не было достаточно давно.

По неофициальным данным, на концерте собралось полмиллиона человек — потому что все просто не поместились на крупнейшей площади континентальной Европы и третьей по величине площади мира. Концерт собрал рекордное число слушателей за всю карьеру Queen.

§ 2. Формирование звука современной электрогитары

Струны любого музыкального инструмента — будь то фортепиано или клавесин, акустическая или электрическая гитара, скрипка, виолончель или контрабас, домра или балалайка — звучат совершенно одинаково и подчиняются одним и тем же физическим законам.

Их математическая модель описывается одними и теми же дифференциальными уравнениями в частных производных с оператором Лапласа и краевой задачей Коши в классической декартовой системе координат (никаких сфер и цилиндров — все привычно и понятно).

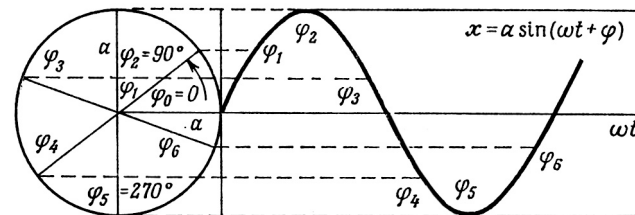
Простейшее волновое уравнение имеет вид:

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$$

Отсюда можно получить общее решение уравнения:

$$y(x) = a \sin(\omega x + \varphi)$$

Угол φ называется фазовой постоянной. Простые гармонические колебания часто объясняются на примере кругового движения. Каждое возможное значение смещения x можно представить как проекцию радиус-вектора постоянной длины a на диаметр окружности, описываемой концом этого вектора при вращении его с постоянной угловой скоростью ω против часовой стрелки. Таким образом, каждый поворот радиус-вектора на фазовый угол 2π радиан соответствует одному полному периоду колебаний.



Когда математики строили и изучали модели гармонических колебаний струны, они просто натягивали струну — и изучали ее колебания как таковые. Затем

изучали гармонические колебания электрического осциллятора как такового. К конкретным музыкальным инструментам это не имеет особого отношения.

Струна совершает колебания не только в одной плоскости — она колеблется в трехмерном пространстве, и колебания описываются более сложными уравнениями.

Ряд физико-математических обоснований позволяет сделать вывод, что в трехмерном пространстве струна колеблется с одной и той же частотой. Различаться могут только амплитуды (размахи) этих колебаний.

То есть колебания в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях являются независимыми по амплитуде (размаху) колебаний.

Система колебаний струны в пространстве описывается парой дифференциальных волновых уравнений:

$$\begin{cases} y''(x) + \omega^2 y(x) = 0 \\ z''(x) + \omega^2 z(x) = 0 \end{cases}$$

Отсюда можно получить общее решение:

$$\begin{cases} y(x) = a \sin(\omega x + \varphi) \\ z(x) = b \sin(\omega x + \varphi) \end{cases}$$

Независимо от типа волн, волновую скорость всегда можно представить как функцию упругости и инерции среды. Упругость связана с механизмом накопления потенциальной энергии.

Инерция среды связана с накоплением кинетической (для механических тел) или индуктивной (для электромагнитных взаимодействий) энергии.

В качестве среды выступает металлическая струна различной толщины. Чем толще струна — тем более она инерционная, тем ниже тембр ее звучания и меньше частота собственных колебаний.

Гитаристов учат, что струна колеблется по синусоидальным законам, часто не уточняя, что она независимо колеблется в двух перпендикулярных плоскостях. И эти колебания гитарист может сам реализовывать.

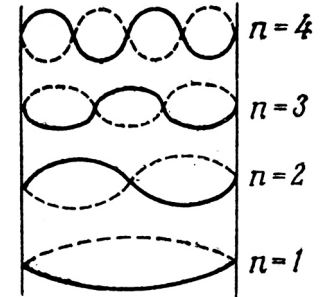
Пианисты не могут управлять колебаниями струны в двух плоскостях, так как по струнам бьют молоточки.

Однако ни одна струна сама по себе не колеблется, подчиняясь описанию только одной функции синуса.

Она совершает множественные колебания, которые складываются друг с другом и каждый раз формируют ее уникальное звучание.

Для их математического моделирования вводят понятие собственных функций и собственных значений волнового уравнения.

Собственные значения показывают, сколько целых стоячих волн может образоваться на струне фиксированной длины.



На схеме приведены первые четыре функции собственных колебаний струны, которые являются наиболее актуальными для гитариста. Их иногда называют гармониками или обертонами и нумеруют.

Колеблющаяся струна обладает и кинетической, и потенциальной энергией. Полное смещение струны является линейной комбинацией их собственных функций.

Для моделирования колебаний струны используются разложения функций в ряды Фурье:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nx) + c_n \cos(nx)$$

$$z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(nx) + d_n \cos(nx)$$

Безусловно, ни на одной физической струне нельзя реализовать бесконечное число сколь угодно малых колебаний. Составляющих гармонических колебаний может быть много — но их число оказывается все равно конечным. И это несколько облегчает жизнь музыкантам.

Исполнителей долго учат грамотно использовать гармонические составляющие колебаний струны, производя воздействие на струны в строго определенных местах и даже меняя место извлечения звука в зависимости от положения рук на грифе гитары.

Им рисуют схемы синусов и косинусов и говорят, что только так совершает колебания натянутая струна.

Ряды Фурье себя ведут очень хорошо и быстро сходятся, если исходные функции хорошие — они ограничены и, кроме того, обязательно имеют ограниченные первые и вторые производные. Это существенно !!!.

Первая производная — это скорость движения струны, вторая производная — ее ускорение.

Условие сходимости рядов Фурье прекрасно выполняется до тех пор, пока на струне и инструменте просто по-человечески играют, а саму гитару истерически не дергают во все стороны и постоянно не трясут ею.

Но как только струна начинает рваться или лопаться на сцене, или струне вдруг придают резкие внешние ускорения, или пока гитару просто не разбивают вдребезги в конце выступления — в этом случае нарушается условие сходимости рядов Фурье.

Поведение такой аномальной акустической системы моделируется уже цилиндрическими функциями Бесселя и Неймана в цилиндрических координатах. Система не может описываться ТОЛЬКО привычными рядами Фурье.

Интересно, где Вы видели нормального гитариста, который бы во время исполнения гитарного соло периодически не дергал и не тряс свою электрогитару...

Даже среди тех, кто фанатично любит свои сокровища и никогда не станет разбивать их на сцене (ну в крайнем случае разобьет другую гитару, которую ему не жалко).

Таким образом, к каноническому разложению волн в ряды гармонических функций может прибавиться еще один ряд разложения — по обобщенным гармоническим функциям (так называемым цилиндрическим функциям математической физики).

Это и есть **ответ на самую большую музыкальную загадку XX века** — почему модель звучания электрической гитары в руках рок-гитариста не всегда укладывается в привычные схемы и математические модели классических гармонических колебаний. Нельзя моделировать только рядами Фурье процессы, которые не удовлетворяют исходным требованиям к самой системе рядов Фурье.

Электрическая гитара — очень молодой, с точки зрения теории колебаний, инструмент. Возникает естественный вопрос — как много научных работников (конкретно, прикладных математиков — в сфере математической физики) фанатеют от электрогитары? Дадут ли им защищать диссертации на подобные темы? Думаю, можно не отвечать.

Для того, чтобы понять и почувствовать, как звучат и ведут себя струны любого музыкального инструмента, нужно обязательно научиться играть на акустическом струнном инструменте.

В акустическом инструменте колебания струн передаются корпусу, который резонирует в такт звучания струн. Именно звуковые колебания пустотелого корпуса формируют характерный звук акустического инструмента и позволяют слышать чистые звуки без электрических искажений — и для пианино, и для гитары.

Одной из главных особенностей электрогитары, которую активно используют солирующие гитаристы, является способность ее струн и корпуса воспринимать внешнее управление. На самом деле, любые струны и корпус принимают такое воздействие, но озвучивают его только постхендриковские электрические инструменты.

Струны акустической гитары передают колебания корпусу, который принимает часть энергии колебаний струны и начинает резонировать. Вместо того, чтобы рассеиваться в пространстве, энергия струны вызывает ответные резонансные колебания корпуса. Затем энергия колебаний корпуса снова возвращается струнам в качестве резонанса, благодаря чему струны звучат значительно дольше.

Формируется достаточно замкнутая акустическая система, ориентированная на максимально долгое и чистое звучание, которое ценится у музыкантов выше всего.

Струны, натянутые на обычную доску, не будут звучать долго и красиво. Человечество веками шлифовало и форму, и материал акустических инструментов, чтобы они не просто резонировали и усиливали колебания натянутых струн. Пустотелый корпус должен был отсекал лишние обертоны, засоряющие звучание струны, и делать звук инструмента чистым и звонким.

Таким образом, путем векового опыта человечество создало акустические инструменты, не только усиливающие

звучание струны, но и очищающие звук от шума и стабилизирующие звучание избранных обертонов струны.

Благодаря этому звучание акустических инструментов можно моделировать рядами Фурье. Хороший или плохой инструмент, можно понять, только сыграв на нем и послушав его звучание вживую. Прочее роли не играет.

Хороший акустический инструмент должен чисто звучать и в неблагоприятных для него условиях легкой тряски, вибрации, толчков и т. д. Его корпус должен отсекал все нежелательные внешние воздействия и шумы.

Так обычно и происходит на практике. Как бы электро-гитаристы не трясли корпус акустической гитары и как бы они ею, бедолагой, не вибрировали — это очень слабо сказывается на результирующем звучании инструмента. Услышать вносимые ими звуковые модуляции сможет только тренированный музыкальный слух.

Совсем иное дело — электрогитара. У нее значительно меньший по размеру и толщине корпус, часть которого занята электронными примочками и креплениями. Ее корпус не рассчитан на то, чтобы обеспечивать струнам акустическое звучание, направленное в зал — это сделает электроника и электричество. Сама гитара звучит плохо.

Но это не значит, что ее корпус не резонирует и не воспринимает колебания гитарных струн. В электрогитаре очень большое значение имеет не только материал, из которого сделан корпус — важную роль играет даже древесина, из которой сделан гитарный гриф.

Многие гитаристы экстра-класса играют на гитарах, корпус которых выполнен из красного или иного дорогого дерева. Не потому, что им некуда девать деньги — только ценные породы дерева обеспечивают высокое качество звучания струн на малых формах концертного корпуса.

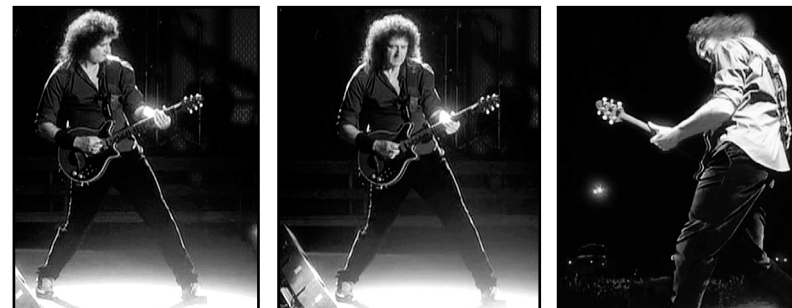
С точки зрения физики сплошных сред, это связано с понятием твердости и однородности среды. Ценные породы дерева имеют заметно большую твердость. А значит, и звук в них распространяется ощутимо быстрее.

Звук в корпусе должен передаваться и модулироваться очень быстро и так же быстро возвращаться струнам. Это связано с тем, что результирующий звук снимается не с корпуса, а непосредственно с самих струн (снизу).

Корпус перегруженной электрогитары не может сам по себе стабилизировать звук, как это делает акустический инструмент.

Гитарист вообще не должен делать лишних и тем более неуправляемых телодвижений. Если Вы смотрите кинофильм, в котором один из героев скачет по сцене и дико трясет инструментом, в то время как из динамиков раздается даже самое заурядное гитарное соло — это значит, что в студии звукозаписи за героя сыграл нормальный квалифицированный и спокойный музыкант.

Это строго следует из законов физики. Чтобы максимально избежать неуправляемых шумов, связанных с влиянием ускорения и тряски, особо чуткая электрогитара во время звучания должна либо почти покоиться, либо двигаться практически прямолинейно и равномерно.



Умение стоять, как скала, и держать гитару почти неподвижно во время забойных гитарных соло должно быть обязательным навыком гитаристов, играющих очень жесткий рок. Причем речь идет не столько о ритм-гитаристах, сколько о гитарном соло.

Как отмечалось ранее, особенности устройства электрогитары позволяют через ее корпус и гриф передавать на струны дополнительные внешние вибрации. В соответствии с волновыми законами, вибрации будут складываться с основным звучанием струны, выведенной из равновесия медиатором или пальцами исполнителя, после чего передаваться на звукосниматели под струнами.

Таким образом, результирующее звучание представляет собой колебания струн гитары, на которые накладываются колебания, вызванные внешним управлением.

Поэтому акустические колебания струны электрической гитары можно назвать управляемыми. Управление может носить волновой, линейный и нелинейный характер.

Внешнее управление представляет собой не последовательность искажений электрического сигнала в электрических цепях, а механическое воздействие на струны гитары и опосредованно — на струны через корпус и гриф электрогитары до того момента, как звук будет преобразован в последовательность электрических импульсов.

Волновые законы в физических акустических процессах и в последовательности электрических волновых импульсах описываются **одинаковыми уравнениями волнового осциллятора**. Поэтому гитарист **может** заменить практически все дополнительные электронные эффекты (управление в электрических цепях) механическим управлением, которое накладывается на звучание гитарных струн (механическое управление внешними волновыми колебаниями струны).

Поэтому, хотя бы гитаристы или не хотят, но они вместе со своим драгоценным инструментом подчиняются строгим законам современной волновой физики.

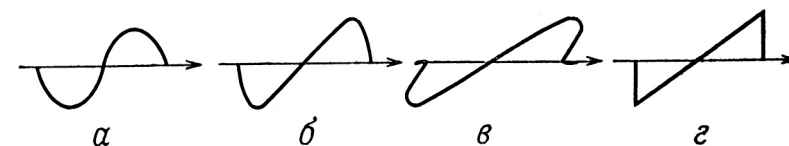
Даже если они играют трэш-металл и тому подобные особо жесткие музыкальные направления, им придется добиваться чистоты звука не просто техникой исполнения, высокой скоростью и точностью движений медиатора, беглостью и техничностью движений пальцев на гитарном грифе — но и **удалением всех линейных и нелинейных внешних помех с грифа и корпуса гитары**.

Они должны научиться не вносить неволновые внешние помехи и дрожь в гитару, звучащую на высоких (околокритических) скоростях изменения звука, обеспечивая очень плавные и слабо-амплитудные колебания корпуса.

Если исполнитель еще может научиться заглушать струны, точно ставить пальцы на гриф и очень быстро их убирать, звук все равно подчиняется законам электромагнитного и звукового резонанса и поведения волн с дальнейшим их преобразованием в электрических цепях.

Сам процесс восприятия звука и процесс обработки в системе не зависят от мастерства гитариста. Этот процесс является инерционным. Любые волновые колебания формируются, нарастают и затухают не мгновенно — должен пройти пусть очень малый, но ненулевой отрезок времени. Назовем его критическим.

Скорость подачи импульсов в электрическую систему при исполнении особо техничного трэш-металла приближается к критическим показателям времени и относится к пограничным состояниям. Поэтому малейшие линейные и нелинейные помехи, попадающие в систему извне и не оказывающие заметного влияния при более низких скоростях, на околокритических скоростях модуляции электрических волн вызывают заметные сдвиги по фазе и оказывают существенное влияние на поведение системы в целом. Разные звуки могут слиться в равномерный гул.



Нелинейные эффекты в акустических и электрических волнах возникают, если амплитуда такой волны слишком большая. Именно эта ситуация возникает у гитариста, играющего в режиме крайней закритической перегрузки.

Нормальная звуковая волна соответствует случаю (а). В случае звуковой волны с конечной амплитудой скорость будет больше там, где больше ее плотность и давление.

Локальные возмущения, соответствующие таким частям волны, будут перемещаться быстрее ее возмущений с меньшими плотностью и давлением и нагонять их — вариант (б). Волна деформируется с течением времени, поскольку ее гребень догоняет области с меньшей плотностью и пытается обогнать их.

Крайний случай (в) не достигается из-за механизмов, приводящих к увеличению энтропии. Вместо этого синусоидальная волна стабилизируется в виде так называемой ударной волны (г) с крутым вертикальным передним фронтом. Это не так страшно, как цунами или торнадо.

Локальные ударные волны не описываются с использованием рядов Фурье, гармонических функций и вообще не подчиняются никаким волновым законам.

Таким образом, в систему вместо нормальных синусоидальных волн поступают разрывные ступенчатые сигналы, которые система физически не может обработать и исправить в соответствии с волновыми законами.

Электроника отсекает пиковые значения, а ревербератор модифицирует сигнал как может. В результате вместо отдельных нот звучит некий единый звуковой фронт или набор звуков, не имеющих отношения к нотам.

Чем сильнее эффект реверберации, тем больше сливаются друг с другом отдельные немusикальные звуки.

Если эффект реверберации понизить, тогда будут наблюдаться неконтролируемые пиковые скачки, также никаким образом не напоминающие музыку. Зато они успешно имитируют стук работающего мотора, выстрелы и тому подобные немusикальные звуки, связанные с локальным образованием массива звуковых ударных волн.

Единственный путь улучшения качества звука — обеспечение нулевых линейных и нелинейных (скачковых) внешних помех в системе, которые способствуют формированию ударных волн в закритических режимах.

Поскольку для играющего человека невозможно добиться положения идеального покоя, вместо линейных и нелинейных помех нужно вносить **волновые низкочастотные помехи**, плавно и слабо вращая корпус гитары и выполняя плавные колебания грифом в одной плоскости.

Только низкоамплитудные и очень слабые колебательные гармонические процессы не вызывают в данной сверхперегруженной системе формирование ударных волн.

Только так вместо гула, воя, стука и сливающихся на больших скоростях нот можно воспроизводить четкое и ясное звучание каждой отдельной ноты соло-гитары — почти что вне зависимости от скорости и последовательности извлечения звуков и аккордов исполнителем.

В самом начале соло Брайан переводит гитару в закритический и сверхчувствительный режим восприятия.

Каждое его движение и каждая постановка пальцев на грифе сами по себе формируют очень мощную звуковую волну в системе. Каждый шаг исполнителя и его легкий наклон сопровождается мощным звучанием инструмента в форме осмысленных и чистых нот и аккордов.

В перегруженном режиме гитара практически неуправляема, так как ее звуковые колебания формируются уже при минимальных телодвижениях исполнителя, не связанных даже с игрой пальцами и медиатором.



Перед исполнением наиболее забойной партии Мэй становится в широкую и устойчивую стойку, глушит струны и замирает, не переводя инструмент в другой режим.

Его гитара прекращает звучание. Это значит, что уровень вносимого в систему механического и резонансного шума достигает минимально возможного для человека уровня. Все последующее время пребывания в стойке гриф гитары Мэя совершает очень слабые и плавные обобщенные гармонические колебания строго в плоскости гитары (как будто его гитара лежит на крышке стола).

Корпусу гитары также придаются чрезвычайно плавные и очень малые объемные обобщенные гармонические вращения предплечьем правой руки и правым бедром.

Гитара при этом имеет минимальный контакт с корпусом и руками самого исполнителя.

Если гитарист не придает электрогитаре управляемые низкочастотные и низкоамплитудные гладкие гармонические колебания, за счет мышечной дрожи в систему вносятся нелинейные стохастические шумы (дрожание).

Шумы накладываются на быстроменяющийся рисунок звука и вызывают формирование звуковых и электрических ударных волн в общей электрической цепи.

Чем больше гитарист будет напрягаться с целью задержать, тем больше в его мышцах будет накапливаться усталость, вызывающая еще большую дрожь электрогитары и вносящая еще большие помехи в ее звучание.

Единственным способом борьбы с подобными явлениями и неконтролируемой дрожью мышц являются осознанные и отработанные плавные и легкие мышечные движения, формирующие общий фон направленных гармонических колебаний с низкой частотой и амплитудой.

Это же позволяет гитаристу не перенапрягать мышцы. Уже с расстояния в 2-3 метра все гармонические фоновые движения гитары Мэя практически не видны на глаз.

В результате звуковые ударные волны во время исполнения данного гитарного соло не возникают.

И еще. Все музыканты, играющие медиатором, знают, что медиаторы бывают различной жесткости. Гитарные соло обычно исполняются самыми жесткими и толстыми пластиковыми медиаторами, что обеспечивает в нужный момент минимальное время контакта медиатора и гитарной струны. Это обеспечивает чистый и звонкий звук с минимальным количеством побочных обертонов.

Жесткий медиатор лидер-гитариста должен контактировать со струной самое минимальное время. В связи с этим шумовые высокочастотные обертоны на акустической струне практически не формируются, и звук получается максимально чистым и ровным.

Более мягкий и тонкий пластиковый медиатор изгибается и задерживается на струне, обеспечивая глухой звук, заполненный всевозможными обертонами. Кстати, подушечки пальцев в этом случае обеспечивают более качественный звук за счет своей мягкости. Поэтому многие лидер-гитаристы вместо мягкого медиатора предпочитают играть мелодию на струнах непосредственно пальцами.

Таким образом, можно сделать один из первых выводов, **чего нельзя делать с электрогитарой никогда.**

Вне зависимости от скорости игры и методов звукоизвлечения, корпус электрогитары не должен подвергаться не только резким толчкам, дрожанию, но и любым другим неуправляемым воздействиям со стороны гитариста.

Корпус электрогитары никогда не должен подвергаться высокочастотным колебаниям, тем более в резонансе со скоростью звукоизвлечения. В этом случае в электромагнитной цепи формируется набор ударных волн, которые не подчиняются звуковым волновым процессам.

Корпус электрогитары не должен подвергаться вибрациям той же частоты, что и скорость звукоизвлечения на струнах при любой скорости. Движения грифа гитары и колебательные движения корпуса должны **существенно** отличаться от скорости звукоизвлечения (скорости работы пальцами или медиатором по струнам).

Например, при высокой скорости звукоизвлечения (забойном рок-н-ролле и трэш-партиях) вибрации корпуса и грифа должны быть очень плавными, достаточно медленными (по сравнению с забоем) и низкоамплитудными. И ни в коем случае никогда не совпадать друг с другом.

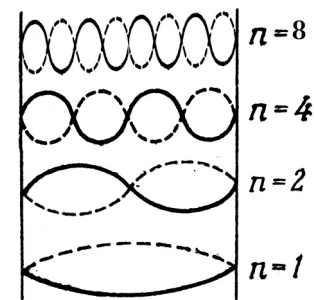
Если корпус гитары дергается практически одновременно с ударами по струнам или с незначительной разницей, формируются неволновые колебания, имеющие ступенчатую или иную негладкую (а то и просто разрывную) форму генерируемой волны на осциллографе.

При низкой скорости звукоизвлечения (медленные пассажи) корпус электрогитары должен совершать как минимум несколько тактов амплитудных колебаний, чтобы придать звуку перегруженной электрогитары всю полноту звучания и характерность индивидуальной окраски.

Это и есть тот самый почерк гитариста, по которому **его** электрогитара становится узнаваемой и уникальной. Такая манера игры является отличительной особенностью звучания всех постхендриксовских соло-гитаристов.

В этом случае музыкант управляемо насыщает заданными им самим обертонами почти чистое звучание струны в электрической цепи (предполагается, что музыкант умеет играть чисто). Поясню, что это означает.

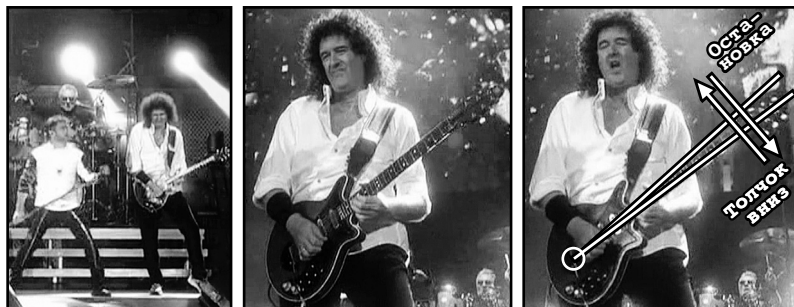
Можно считать, что музыкант играет чисто, если в звучании струны с неподвижным корпусом присутствуют специфические обертоны, которые представлены степенями одного числа. Например, только степенями двойки — 1, 2, 4, 8, 16, 32 ... , или степенями только тройки — 1, 3, 9, 27 и так далее (по возможности).



Теоретически сложно сказать, как этого добиться. Рекомендуют производить воздействие на струну строго посередине, строго на расстоянии одной четверти и т. д.

Музыканты добиваются чистоты звучания путем длительных и нудных занятий, повторяя одно и то же до бесконечности. Вначале они отрабатывают звучание на акустических инструментах. До тех пор, пока те не начнут звучать удовлетворительно — с точки зрения электро-гитариста.

Есть гитаристы, которые добиваются вибраций инструмента только через гриф электрогитары. Это один из наиболее старых и популярных приемов. Его используют большинство солирующих гитаристов. Для чистого выполнения требуется большая концентрация внимания, поэтому любые другие приемы на гитаре одновременно с этим приемом выполнять не рекомендуется.



Чтобы придать яркую и чистую вибрацию звуку солирующей гитары, гитаристы часто совершают видимые колебательные движения грифом гитары вверх-вниз.

В этом случае они накладывают модулирующие гармонические колебания корпуса на уже существующие гармонические колебания струны, получая их суперпозицию строго в соответствии с волновыми законами.

На основное чистое звучание струны накладываются очень ясные и четкие обертоны. Главный секрет состоит в том, чтобы не делать чрезмерно амплитудных движений, совершать их в плоскости гитары и угадать частоту для конкретной звучащей ноты или гармонического аккорда.

Вибрации грифа должны быть очень ясными и четкими, тогда и модулируемый звук тоже будет качественным. Если вибрации накладывают на свободно звучащую струну, они будут наиболее выразительными.

Отмечу, что на поведение математической модели и звучание инструмента **существенное влияние оказывает частота колебаний грифа**, а не размах (амплитуда) колебаний. Поэтому сильно и резко сдвигать гриф нельзя.

Более того, гитарист должен совершать колебания грифом гитары во времени с одной и той же частотой, то есть совершенно одинаково на протяжении всего времени исполнения приема.

Если частота колебаний грифа попадает на одну из частот обертонов чисто звучащих струн, звук усиливается, становится продолжительным и равномерным. Это теоретически возможно только в том случае, когда гитарист **играет соло чисто и грамотно, а гитара не дергается**.

Брайан пошел дальше в исполнении этого распространенного приема. Он наложил не только гармонические, но и обобщенные гармонические колебания, описываемые не синусами, а функциями Бесселя, которые не вошли в резонанс с существующим чистым звучанием струн и их обертонами, а сформировали вторую — независимую и параллельную линию звучания одного инструмента.

На его месте Джимми Пейдж сыграл бы две гитарных партии и наложил бы их в студии одна на другую.

Мэй добивается такого результата благодаря тому, что колебания производятся толчками в плоском конусе, центр которого оставался практически неподвижным. Более того, центр приходится точно на подставку струн.

Мэй сформировал еще одни независимые колебания, которые складываются из функций следующего вида:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2\pi n x / x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_m^{(n)} J_n(x \lambda_m^{(n)} / x_0)$$

где $\lambda_m^{(n)}$ — нули функции Бесселя $J_n(x) = 0$
и x_0 — длина струны (звучащая часть струны).

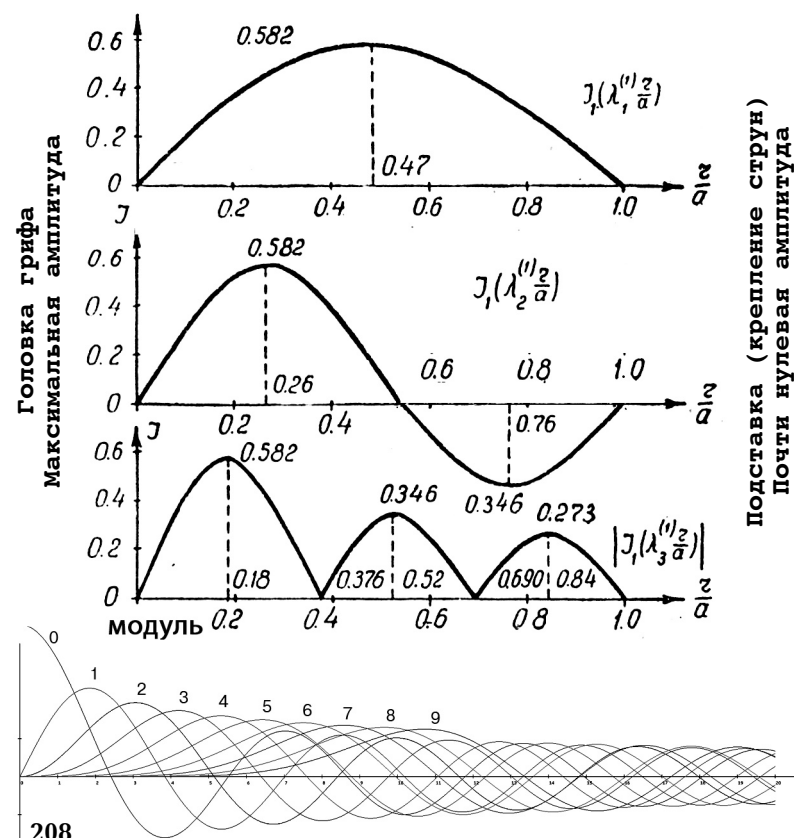
В отличие от синусов и косинусов, которые имеют одинаковое поведение на всей числовой оси и являются периодическими функциями с периодом колебаний 2π , максимумы и минимумы функций Бесселя постепенно прижимаются к нулю (уменьшаются по модулю), а период их колебаний стремится к 2π . Поэтому по всей длине струны гитары общего резонанса колебаний не происходит.

Нужно отметить, что и гармонические колебания струны, и вибрации грифа гитары, которые сформировали еще один ряд независимых колебаний, совершаются строго в одной плоскости, параллельной передней крышке гитары. Поэтому мы слышим музыку, а не шумовые эффекты.

Точно таким же образом Мэй формирует движения грифа гитары во время исполнения забойных соло, при которых гриф совершает слабые низкочастотные и низко-амплитудные фоновые колебания. Для того, чтобы они не звучали и не резонировали в такт, эти колебания должны модулироваться другими функциями (причем слабыми).

Если гитарист размещает центр, вокруг которого гриф совершает колебания, не на подставке — в месте крепления струн, а в центре тяжести самой гитары (как это делает большинство), он получает обычные модифицированные гармонические колебания, а не другой ряд независимых специальных функций математической физики.

Первый и второй график показывают поведение этих функций вблизи начала координат (у головки грифа). Третий график — модуль указанной функции.



Одной из самых частых ошибок, которые допускают гитаристы, являются избыточно амплитудные и размашистые движения корпусом и грифом гитары. Музыкантам кажется, что таким образом они сделают свой звук более выразительным. Это видно на фото.



В соответствии с волновыми законами, результирующие звуковые колебания формируются при сложении всех колебаний, которые были переданы струнам гитары в любой форме. Любые колебательные процессы оказывают друг на друга существенное влияние только тогда, когда их частоты и амплитуды имеют достаточно близкие друг к другу значения и показатели.

Если амплитуда и частота одних колебаний значительно отличается от других колебаний, они не будут оказывать друг на друга существенное влияние. Например, на низкочастотные колебания струны почти не оказывает воздействие высокочастотный шум. Но на высоких тонах вносимые таким шумом искажения будут существенно заметнее — поскольку их частоты находятся ближе.

На высокочастотные колебания также практически не оказывают никакого влияния низкочастотные слабо-амплитудные воздействия. Такие колебания существуют как бы независимо друг от друга.

Хотя акустические колебания натянутых струн электрогитары могут иметь значительный перепад частотного диапазона звучания, амплитуда всех этих колебаний очень мала — от долей миллиметра до нескольких миллиметров на пике мощности звучания.

У более толстых струн, дающих низкое звучание, амплитуда колебаний может быть больше. Самая низкая амплитуда у тонких струн, звучащих на высоких частотах. Это является следствием закона сохранения энергии.

Человеку очень сложно извлекать медиатором или пальцами на струнах звуки с одной скоростью, а корпусом и руками выполнять абсолютно не связанные с этим движения, колебания или толчки корпуса и грифа гитары.

Если первой и шестой струнам гитары придать один и тот же импульс, более толстая струна будет вибрировать с меньшей частотой и низкой скоростью. Тонкая струна имеет высокие частоты, и скорость ее перемещений выше.

Если струна имеет линейную плотность $\rho(x)$, ее полная кинетическая энергия (энергия движения) по всей длине выражается интегралом:

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} \int_0^{x_0} \rho(x) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx \quad \text{где } \frac{\partial y}{\partial t} \text{ — скорость}$$

Струны музыкальных инструментов обычно имеют равномерную плотность ρ по всей длине. Все струны электрогитары (звучащая их часть) имеют одинаковую длину. Чем ниже звучит свободная струна, тем она толще и плотнее — а значит, скорость ее колебаний будет ниже. Чем тоньше струна, тем выше скорость ее колебаний.

Потенциальная энергия струны равна работе, которую совершает струна при отклонении от точки равновесия. Она соответствует амплитуде колебаний струны.

Если струнам придать одинаковое отклонение, то в соответствии с особенностями краевой задачи Коши для волнового уравнения амплитуды на начальных этапах колебаний у струн будут одинаковыми.

Поэтому гитаристы отрабатывают приемы, связанные с приданием одинаковой амплитуды колебаний струнам разной толщины в один момент времени.

Чем больше амплитуда — тем сильнее звук. Отклонить толстую струну легче, чем туго натянутую и тонкую на такое же расстояние. На электрогитаре это вызовет противное дребезжание толстой струны. Вот одна из причин, почему электро-гитаристы и музыканты, играющие на акустических щипковых инструментах с малым размером корпуса, предпочитают играть именно медиатором.

Колебания корпуса нагруженной (и тем более перегруженной) электрогитары будут влиять на звучание струн только тогда, когда их амплитуда небольшая — в противном случае вместо гармонических взаимодействий в систему будут вноситься пиковые перегрузки, которые вызывают формирование отдельных звуковых ударных волн или пакетов таких ударных волн в электроцепях.

Чем более резкие и амплитудные движения нагруженной электрогитарой будет совершать исполнитель, тем больше ударных волн будет формироваться в электрических цепях и тем хуже результирующее звучание инструмента.

Поэтому любые перемещения нагруженной электрогитары должны быть не только плавными, без резких толчков, скачков и пиковых нагрузок — они всегда должны быть **низкоамплитудными (малые перемещения)**.

Чем выше мастерство гитариста, тем более неподвижной кажется его гитара в процессе исполнения пассажей. Но на самом деле гитарист не стоит, а совершает во время игры непрерывные, незаметные на расстоянии плавные управляемые колебания и движения корпуса и грифа своего электрического инструмента.

Гитарист, короткое время игравший в паре с Брайаном (фото сверху), не мог понять, почему Мэй очень незначительно перемещает свою гитару, а ее звук оказывается наполненным вибрациями и полнотой звучания. Любые увеличения амплитуды движений грифа гитариста вызывали все более и более нарастающие помехи в электроцепях.

Парадокс объяснялся тем, что Брайан формирует низкочастотные гармонические колебания, которые естественно модулируют звук, и звук продолжает оставаться гармоническим, в то время как резкие толчки и перемещения корпуса и грифа инструмента вызывают пиковые перегрузки и образование ударных волн в электросистеме.

С подобными проблемами никогда не сталкиваются музыканты, играющие на акустических инструментах. Более того, никто из гитаристов, играющих на ненагруженных электрогитарах, тоже никогда не сталкиваются с подобными проблемами (они просто глушат избыточный звук на корпусе). Подобные проблемы возникают только на околокритических и закритических схемах формирования звучания перегруженного электроинструмента.

Поэтому большинство играющих на неперегруженных электрогитарах или акустических гитарах не могут справиться с управлением перегруженного инструмента. Чтобы играть на такой гитаре, требуется выработка особой техники, позволяющей вносить в систему непрерывные слабоамплитудные колебания. Не только для того, чтобы формировать новый звук, но и просто, чтобы иметь возможность держать гитару в руках и играть в этом режиме.

Профессиональная игра на высокочувствительной солирующей электрогитаре налагает на исполнителя много ограничений, связанных с особенностями взаимодействия корпуса, грифа и акустических колебаний, которые затем преобразуются в электрические сигналы.

Корректно и полно поведение данных систем моделирует только современная математическая физика. Вот что сделал Джими Хендрикс полвека назад — он реализовал новую математическую модель поведения гитары и сформировал новую плеяду выдающихся гитаристов.

Для того, чтобы разнообразить невыразительный звук дохендриксовской электрогитары обертонами, исполнители поднимали инструмент перед собой и вибрировали и вращали его на высоких амплитудах.

Для того, чтобы украсить звук солирующий нагруженной электрогитары, исполнители применяют специальную примочку — рычаг. Пользуются рычагом только в технике гитарного соло (ритм-гитаристы этого не делают).

Рычаг позволяет регулируемо изменять натяжение струн — а значит и длину струн.

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2\pi n x / x_0)$$

$$y^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2\pi n x / (x_0 - \Delta x))$$

где Δx — величина, на которую изменяется начальная длина струны x_0 . Рычаг вносит слабые с точки зрения физики, но заметные с точки зрения звучания искажения в систему вне зависимости от того, какими гармоническими колебаниями она описывается.

Как видно из формулы, рычаг не влияет на амплитуду колебаний, но изменяет их частоту — понижает ее.

То же самое происходит и с цилиндрическими функциями Бесселя, если они присутствуют в разложении.

Рычаг используют только на свободно звучащих струнах и прижимают его правой рукой в тот момент времени, когда гитарист не играет медиатором или пальцами. Для этого требуются определенные физические усилия.



Хотя рычаг дает весьма хороший звуковой эффект и его обожают начинающие гитаристы, Брайан пользуется им с осторожностью, на малых амплитудах и редко, предпочитая режим механических модуляций корпуса.

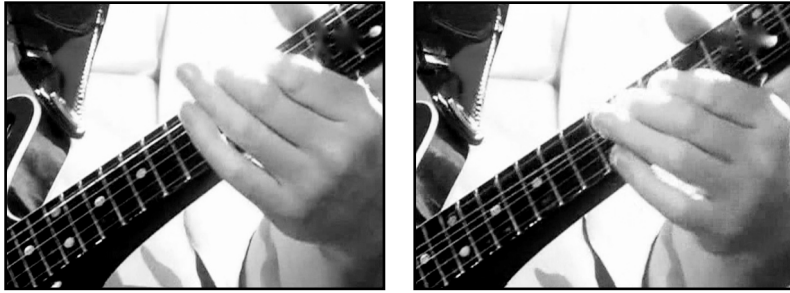
Электрогитары оборудуются фиксированными и плавающими подставками. Именно плавающая подставка позволяет пользоваться рычагом и модулировать частоту колебаний струн электрогитары таким способом.

Для того, чтобы гитарист мог пользоваться рычагом без мышечного перенапряжения, существуют различные системы подставок. Плавающая подставка обязательна для солирующего рок-гитариста.

Плавающие подставки делятся на два типа — тензионные и вибрато-подставки. Начинающим рекомендуют тензионные подставки. Продолжающие гитаристы пользуются плавающей вибрато-подставкой.

Еще одним классическим способом, которым музыканты придают вибрирующие звуки струнам, являются вибрации на грифе в месте прижатия струн. Научить технике могут профессиональные преподаватели музыкальных школ и консерваторий. Преподавателям не нужно быть электрогитаристами — такая техника звукоизвлечения шлифовалась человечеством тысячелетиями.





Данная техника модуляции описывается похожими уравнениями с той лишь разницей, что производится удлинение струны электрогитары и повышением частоты ее колебаний во время подтяжки струн вверх или вниз.

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2\pi n x / x_0)$$

$$y^{**}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2\pi n x / (x_0 + \Delta x))$$

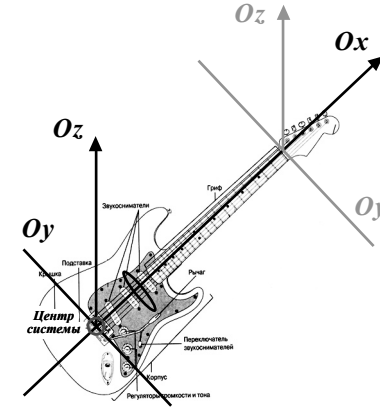
Исполнение этой профессиональной техники имеет смысл только на солирующей нагруженной электрогитаре. Для нее обязателен качественный гриф, выполненный из специальных особо ценных и дорогих пород дерева — для солирующего гитариста любого уровня мастерства.

Данные модуляции могут сопровождаться вынужденными колебаниями грифа электрогитары, которые должны производиться строго в соответствии с приведенными ранее моделями колебаний грифа — и никак иначе.

В некоторых случаях значительными подтяжками струн гитары Брайан плавно меняет тональность звучания до полутона вверх как минимум. Это позволяет не переставлять пальцы на грифе и обеспечивает ровное звучание, на которое еще и налагаются модулируемые вибрации.

Кроме солирующей электрогитары, ни один инструмент не озвучит этот прием настолько выигрышно. Электрогитара может зазвучать, как две разных гитары — без студийных ухищрений, на живом концерте.

И рычаг, и подтяжки струн на пол-тона используются гитаристами вместо перебора струн на грифе.



Для наглядности поставим гитаре систему координат. В зависимости от описываемого процесса, могут быть два указанных варианта размещения координатных осей.

Ось **Ox** располагается строго вдоль грифа.

Система является привязанной к гитаре. Любые перемещения будут трактоваться как действия над системой координат гитары.

С точки зрения математического моделирования это позволит отделить гармоническое звучание инструмента и придаваемые ему внешние воздействия (управление).

Все процессы акустического формирования звука на струне и процессы восприятия звука со струн моделируются в системе координат, которая привязана к инструменту и является относительно него неподвижной.

Сразу можно видеть, что существенное влияние на чистоту акустического звучания оказывают только такие колебания, которые производятся строго в плоскости **Oxy**, параллельной корпусу гитары.

Поскольку звукосниматели представляют цилиндры с плоским верхом, они снимают колебания струн именно в этой плоскости — электро-магнитный резонанс ведет себя сходно с акустическим резонансом.

Поэтому музыканты, играющие и на акустических, и на электрических инструментах, должны стремиться к тому, чтобы возбуждать колебания именно в этой плоскости. Тогда инструменты будут звучать наиболее плавно, сильно, долго и выразительно.

Колебания в плоскости **Oxz** (перпендикулярно корпусу) чаще всего засоряют чистоту звучания или делают звук очень резким и пронзительным.

Кстати, все смычковые инструменты были придуманы для того, чтобы обеспечить колебания строго в одной плоскости и отсеять колебания в перпендикулярной плоскости. Они обеспечивают наиболее чистое звучание.

Поскольку гитарист играет пальцами и медиатором, ему невозможно избавиться от нежелательной составляющей. Двигать пальцами и тем более медиатором строго параллельно корпусу гитары невозможно. Но если пальцы или медиатор будет двигаться к струнам и от струн круговыми движениями — по сплюснутому эллипсу, это существенно улучшит качество звука.

Играющий на гитаре музыкант может вносить эффективное управление, когда оно производится строго в плоскости *Oxy*. Например, все колебания грифом должны совершаться именно вдоль этой плоскости, параллельной крышке гитары, иначе возникнут значительные помехи.

Можно заметить, что с точки зрения формирования звука центр тяжести электрической гитары не совпадает с началом координат ни одной из приведенных звуковых координатных систем — причем очень существенно.

Мало того, что электрогитара негативно влияет на положение центра тяжести играющего музыканта и выводит его из устойчивого равновесия. Это само по себе многих отпугивает от настоящего солирования на гитаре.

Все движения, выполняемые гитаристом в отношении корпуса и грифа инструмента, должны производиться **исключительно от центра акустического формирования колебаний**, то есть либо от подставки, либо от верхнего порожка грифа, как это показано на схеме выше.

Поэтому чем выше квалификация солирующего гитариста, тем выше у него требования и тем более четко и аккуратно должны двигаться остальные члены группы.

Гитаристы стараются разместить инструмент так, чтобы подставка (акустический центр системы) оборотной стороной прижималась к исполнителю и его правому бедру и была максимально зафиксирована. Рядом находятся ведущие для соло-гитариста звукосниматели. К такому положению приходят интуитивно — получается лучший звук.

Центр тяжести стоящего соло-гитариста с инструментом смещается заметно, но незначительно. Точно так же центр тяжести электрогитары не концептуально удален от центра акустической системы координат — но с точки зрения поведения системы разница колоссальная.

Это заставляет музыканта сразу держать инструмент очень специфическим и характерным способом.

Такие нюансы делают управление электрогитарой и игру на современной соло-гитаре очень сложной — мышцы человека лучше приспособлены для больших, нежели для малых, но пограничных усилий. И все это — на фоне обязательного владения профессиональными навыками звукоизвлечения и реального музыкального образования.



Сегодня гитаристы кладут оборотную часть подставки практически на правое бедро.

Корпус гитары справа от исполнителя почти не выступает, а сам инструмент заметно смещается влево. Чем больше музыкант будет нагружать гитару в процессе работы и увлекаться, тем сильнее будет смещать ее влево, вплоть до полного отлета инструмента в порыве творческого экстаза (тогда спасает ремень). Так играют многие постхендриксовские гитаристы. Они и сидя играют, отставив ногу.

Если гитарист не перегружает гитару, ему все равно, как, куда и к чему ее прижимать — в этом случае корпус инструмента значительно смещается вправо, как и у акустических гитаристов. Так играют в дохендриксовской манере или в облегченной (в т. ч. студийной) манере исполнения.

Без хорошей фиксации акустического центра инструмента гитарист не сможет обеспечить нормальное управление низкочастотными и среднечастотными колебаниями корпуса электрогитары. Именно эти колебания позволяют накладывать дополнительные благозвучные модуляции и управлять музыкальным звучанием электрогитары — благодаря механическим перемещениям корпуса.

Как только гитарист правильно и жестко зафиксирует акустический центр системы, который является началом ее координат, и начнет вносить осмысленные колебания гитары, на струнах под их влиянием начнут дополнительно генерироваться колебания, описываемые цилиндрическими функциями Бесселя. Это управляемые колебания струны.

Амплитуда колебаний, получаемых на основе функций Бесселя, являются максимальной у головки грифа. Минимальная амплитуда колебаний — соответственно у начала координат системы, у подставки и над корпусом.

Если струна порвется — этот момент опишут специальные функции Неймана. Кстати, моменты разбивания гитары также моделируются функциями Неймана, поэтому можно целенаправленно рвать струны без зверского насилия над самим инструментом. Предлагаю создать этим новое музыкальное направление, например, в трэш-металле.

Максимальная амплитуда гармонических звуковых колебаний струны вызываемых пальцами и медиатором, приходится на центральную часть звучащей струны — обычно в районе основания грифа над ближайшими к основанию грифа звукоснимателями. Лидер-гитаристы их не используют — слишком акустическим получается звук.

Чем лучше гитарист научится фиксировать центр системы и управлять колебаниями корпуса гитары всеми доступными разумными способами (я особо подчеркиваю), тем сильнее будут проявляться различия между звучанием гармонических и обобщенных гармонических колебаний. И тем больше простора для полета фантазии обеспечивает музыканту закрытая электрическая электрогитара.

Колебания, которые гитарист принудительно вносит в систему извне и которые искажают звучание инструмента, зависят только от личной прихоти и мастерства самого гитариста. Поэтому такие колебания не всегда резонируют с собственными колебаниями акустических струн инструмента. Они могут налагаться на акустическое звучание струны естественно, а могут вести себя совершенно независимо и самостоятельно. И одна гитара может зазвучать, как две.

Никакие ряды Фурье, никакие тригонометрические синусы и косинусы не могут корректно моделировать возникающий парадокс. Согласитесь — не нужно ни употреблять наркотики, ни искать дьявола для продажи ему своей бесценной души, ни обманывать или предавать.

К относительно доступным способам внесения управления и колебаний в корпус гитары относятся плавные передвижения по сцене, шаги, притопывание, подрагивание ногой, легкие приседания, пританцовывание на месте и подобные телодвижения, которые совершают рок-гитаристы, играющие нормальный мелодический рок.

Зрителям не всегда понятны мотивы их действий и странного поведения на сцене. Впрочем, многие гитаристы тоже не совсем понимают, что и зачем они делают — они просто копируют друг друга, не думают и не смотрят, как двигаются по сцене и стоят ведущие гитаристы мира. И не изучают поведение математической модели системы.

Если смотреть на то, как Брайан играет, то сразу не видно, откуда берется его звук. С площади не было видно, что именно музыкант делает с инструментом.

Мэй играет соло почти три часа. Он стоит, делает шаги туда-сюда и вперед-назад, ходит по сцене и подиуму, изредка бежит с гитарой. Становится время от времени в широкие стойки или на колени. Так сегодня соло-гитаристы и не такое устраивают.

Никаких особых эффектов и примочек не наблюдается — все на виду. И вообще, никакой истерики и конвульсий, которые выдают современные соло-гитаристы при гораздо меньшей сложности и нагрузке солирующих гитарных партий, и никаких разрушений.

Только на медленном воспроизведении видеозаписей крупных планов в режиме опорных видеокadres видно, что именно делает Брайан с электрогитарой. Предплечьем правой руки Брайан непрерывно управляет движениями корпуса электрогитары — почти во всех электрических партиях без остановки. Этим же предплечьем он фиксирует сам корпус инструмента. Отсюда и браслет на руке.

Мэй одновременно играет правой рукой по струнам гитары пальцами, почти как пианист по клавишам, или медиатором, как это умеют немногие, и еще периодически использует рычаг вибрато-подставки.





Не менее сложная техника работы левой руки. Мэй не просто играет на струнах, делает подтяжки и вибрации — кстати, опять-таки пальцы левой руки ведут себя не так, как у типичного гитариста (они не скрючены).

Мэй одновременно с этим управляет движениями грифа электрогитары в одной плоскости, который ни на мгновение не останавливается и не замирает.

Большая часть всех этих практически невидимых на глаз колебаний и перемещений корпуса инструмента находятся **на собственных частотах и амплитудах инструмента** и весьма строго описываются обобщенными гармоническими функциями — функциями Бесселя.

Вспоминается интересный разговор с врачом, который специализировался на токсикологии и тоже был поклонником электрической музыки. Он совершенно искренне удивлялся и не понимал, как Хендрикс вообще мог играть на каком-либо инструменте и тем более солирующей электрогитаре, так как к началу своей феноменальной карьеры он уже был сформировавшимся наркоманом.

Врач пояснил, что в таком далеко зашедшем состоянии все мышцы человека испытывают постоянную дрожь, практически не видимую на глаз. И эта дрожь усиливается при стрессе и приеме наркотической дозы, которая была обязательным элементом выхода Хендрикса на сцену.

Хендрикс так и скончался практически на сцене — от передозировки. Очень многие музыканты и исполнители того времени в поисках новых звучаний и тематик становились наркоманами и умирали. Много гитаристов в поисках среди наркотиков нового звука так ни разу в жизни не сыграли свою ведущую партию на сцене.

Если бы прошло еще пару лет, и Хендрикс не смог бы держать в руках инструмент, он окончил бы жизнь так же бесславно, как и большинство наркоманов-музыкантов. Врач высказал предположение, что Хендриксу с одной стороны повезло, что он успел сыграть и умереть на сцене. А с другой стороны, это действительно был неординарный и очень волевой человек, раз он мог играть, преодолевая постоянную сильную дрожь в теле, руках и ногах.

Брайану Мэю удалось управлять своей гитарой совершенно осознанно и без всяких доз. За этим музыкантом наркотики никогда не замечались. Мэй много лет подряд шлифовал мастерство и свои достижения. Более того, его техника игры на гитаре и мысли не допускает о любых подобных негативных факторах.

Рано или поздно кто-то из ведущих гитаристов мира, имеющих за спиной опыт работы не менее 20-30 лет, свел бы воедино известные приемы игры на электрогитаре.

Гитаристы понимали, что **рано или поздно кто-то из них вычислит, как нужно играть на гитаре**, чтобы ее звук был **полностью управляемым**. Многие гитаристы очень близко подошли к разгадке феномена звука, но никто из них не смог объединить все приемы воедино. Даже прогнозы делались правильные — **не позднее 2010–2012 года**.

Помимо движений рук, Брайан смог воспроизвести колебательные движения корпусом, которыми он передает инструменту дополнительные и независимые элементы колебаний и вращений. И все эти почти незаметные колебания и непрерывные вращения электрогитары также формируют механическое воздействие на уровне специальных функций математической физики. Это воздействие передается струнам и далее — в электрические цепи.

Со стороны все действия Мэя практически не заметны на глаз — особенно на фоне стоящих на заднем плане бас-гитариста и ритм-гитариста, которые дергаются в такт музыке гораздо заметнее и традиционнее.

Дело не только в том, что Брайан отшлифовал приемы игры — он **сплавил собственную индивидуальную манеру игры на гитаре и обращения с инструментом с комплексом технических приемов, которые сами по себе новациями не были**. Это обеспечивает качественно новый уровень звучания его электрической гитары.

Если акустический струнный инструмент позволяет технично извлекать музыкальные ноты на высоких скоростях, и каждая из нот будет звучать, то электрическая гитара этого не допускает в принципе — в силу законов физики и биологии. Высокие скорости извлечения звуков медиатором формируют в электрической цепи пакеты акустических и электрических ударных волн, а не музыку.

Как только электрогитарист начинает играть слишком быстро, в отличие от пианиста он просто перестает быть музыкантом. Я такое видела много раз. Вот поэтому в рок-музыке наблюдался кризис повышенной беглости — слишком много скорости в ущерб качеству звучания.

Кризис беглости в роке проявляет себя уже давно. У большинства электрогитаристов лет 15-20 назад стали измерять скорость работы медиатора с секундомером. В результате ряд выдающихся музыкантов, работавших над звучанием, просто ушли со сцены. А слушателям надоело раскупать творения, не имеющие отношения к музыке.

Музыканта можно оценивать с точки зрения качества модулирования акустических и электрических волн, потому что они **математически описывают музыку**.

Никто не говорит, что беглость игры — это плохо, просто нужно знать меру. Исполнитель — не спортсмен, чтобы скорость его пальцев и медиатора измерять только секундами. Так нельзя измерить ни мастерство Джими Пейджа, ни гитару Ричи Блэкмора, ни Джими Хендрикса, ни музыку других выдающихся гитаристов мира.

Критерий исполнения — способность играть выразительную и эмоциональную музыку разных стилей и направлений, чтобы это оценили зрители, и чтобы она их потрясла. Мэй даже скоростной трэш сыграл с осознанной эмоциональной окраской звучания каждой ноты. Есть надежда, что музыканты постепенно начнут возвращаться к качеству, а не только к скорости играемых нот.

Рассмотрим технические приемы и их математическое моделирование для того, чтобы объяснить технические нюансы управления колебаниями натянутых струн закрытой электрогитары.

Тем более, что математика и физика оставляет современному исполнителю очень ограниченный арсенал для возможных действий на сцене и в студии звукозаписи.

Все, кто играет на акустических инструментах и перегруженных электрогитарах, знают — чем меньше площадь контакта исполнителя и инструмента, тем чище и лучше его звучание. Блокирование части корпуса акустического инструмента не позволяет ему полноценно резонировать, а электрогитаре — воспринимать сверхмалые управляемые колебания корпуса для передачи их на струны.

Это практически не оставляет выбора соло-гитаристам, как им держать свой инструмент на сцене. Остается либо минимально прижимать ее в месте подставки и крепления струн к корпусу, либо держать и играть на весу в воздухе, как это делают только очень избранные гитаристы.



Поскольку инструмент тяжелый и неповоротливый, на весу его держать физически нереально. Поэтому гитаристы находят компромисс — поднимают вверх корпус и гриф инструмента и упирают его в бедро. Гитара в этот момент еще сильнее смещается влево и находится на отлете. Такой прием часто можно видеть у солирующих гитаристов.

При его исполнении гитарист обязательно должен отклониться вправо, чтобы компенсировать смещение влево центра тяжести электроинструмента. Если гитарист сделает корпусом гитары резкое движение и не выполнит компенсирующий наклон — он не только играть не сможет, а споткнется на ровном месте или, хуже того, упадет.

Чем сильнее отлетает гитара влево, тем существенней исполнитель должен изогнуться вправо. Если музыкант стоит в широкой стойке, он может дополнительно сделать небольшой шаг назад. Такова объективная механика компенсации смещения центра тяжести инструмента.

Достаточно неприятным для гитариста моментом является то, что центр тяжести смещенной влево гитары оказывается возле центра тяжести исполнителя.

Как известно, чем короче рычаг, тем большая масса нужна для его компенсации. Поэтому чем ближе центр перемещаемой гитары к центру тяжести гитариста, тем сильнее ему нужно отклоняться и тем устойчивей стоять на сцене. Чем дальше центр тяжести электрогитары от центра тяжести музыканта, тем проще ею управлять и тем меньше усилий нужно для компенсации этого смещения.

С точки зрения эстетики, наиболее выигрышной является такая позиция наклоненного гитариста, при которой центры тяжести инструмента и музыканта совпадают.

Такая позиция неплохо показана на фото слева (белая рубашка). Для ее выполнения Брайану пришлось не только значительно отклониться вправо, но и выполнить широкую стойку, отклонившись назад. На фото справа (темная рубашка) Брайан показывает, как для незначительной компенсации отклонения гитары нужно поворачиваться, и отклоняться вправо не так существенно, как вначале.

Суммарный центр тяжести гитариста и гитары все время остается на месте и никуда не смещается — это фирменный стиль перемещения Мэя с электрогитарой.

Как бы Брайан не смещал гитару и не поднимал ее гриф вверх, он все равно остается устойчивым, потому что **центр тяжести их общей системы не смещается.**

Многие любят, когда гитаристы стоят красиво. Чем легче и изящнее музыкант двигается по сцене, тем более продуманные усилия на это реально затрачиваются. Многие соло-гитаристы не задумываются о том, как им нужно правильно двигаться с инструментом и где именно находятся центры тяжести их и гитары.

Для компенсации их смещения гитаристы интуитивно делают широкие шаги, амплитудные махи ногами и используют очень много места для маневров на сцене. Они часто спотыкаются и изредка падают. Более того, многим не хватает и репетиционных помещений. Естественно, и звука нормального на концерте тоже не будет. Если рядом случайно окажется другой человек, его могут случайно травмировать. Музыканты сносят аппаратуру и элементы оформления сцены, они уже опасны для окружающих.

Поведение системы, в которой находятся два центра тяжести, каждый из которых движется отдельно, описывается очень сложными дифференциальными уравнениями второго порядка, содержащими элементы управления. Для того, чтобы человек мог такое реально воплотить в жизнь, он должен с раннего детства учиться цирковому искусству или заниматься в Пекинской школе балета.

Гораздо проще сразу научиться двигаться так, чтобы **составлять с инструментом одно целое** — тогда уравнения, моделирующие эту систему, сразу превращаются в очень простые формулы школьного курса физики.

Если исполнитель солирует на перегруженном инструменте, любые резкие толчки и шаги немедленно передаются сверхчуткому инструменту, резко сдвигаемому в сторону и возвращаемому толчками в исходную позицию.

Уровень помех становится настолько серьезным и значительным, что если вовремя не приглушить систему, находиться рядом в этот момент окажется невозможно.

То, что легко позволяет себе ритм-гитарист и бас-гитарист, никогда не может позволить лидер-гитарист. Либо музыканту придется прямо по ходу резко переводить гитару в другой режим (как часто гитаристы и делают).

Вдумайтесь — достаточно сделать всего три простых и правильных телодвижения, четко и в противофазе или одновременно, тогда большинства проблем не возникает.

Когда музыкант сдвигает инструмент влево, он поднимает гриф.

Гитара влево — корпус вправо и немного назад в противофазе. Гитара поворачивается в сторону — исполнитель вращается за ней в унисон. Чем ближе гитара к центру тяжести исполнителя — тем сильнее нужно отклоняться и тем более широкая стойка должна быть выполнена перед пассажем. В конце пассажа гитарист делает один или два шага около инструмента и кладет его на бедро. Это является оптимальным управлением системы.



Для того, чтобы стать в широкую стойку, исполнитель опирается на левую ногу, делает шаг в сторону правой ногой, к которой прижат инструмент, одновременно перенося на правую ногу центр тяжести. И перегруженная электрогитара будет оставаться полностью управляемой без изменения фатальных настроек системы в процессе игры.

Естественно, что в процессе исполнения музыкант будет прижимать к себе инструмент. А отодвинуть от себя гитару не получится — она сразу озвучит этот процесс.

Озвучивание произойдет, поскольку колебательный процесс описывается не только показателями частоты, но и возможным сдвигом по фазе на длину θ :

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2\pi n x / x_0 + 2\pi\theta / x_0)$$

$$z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x / x_0 + 2\pi\theta / x_0)$$

Если струна покоится в процессе свободных акустических колебаний, сдвиг по фазе не возникает. Если гитара находится в режимах, не влияющих на поведение ее синусоидальных гармонических колебаний, тогда сдвиг по фазе также не происходит.

Движения грифа накладывают изменения на характеристики этих звуковых колебаний — на амплитуду и формирование ненулевой фазы, за исключением одного вида колебаний, которые модулируются функциями Бесселя.

Любые резкие рывки вдоль грифа и оси Ox вызывают сдвиги по фазе звуковых колебаний, которые регистрируются звукоснимателями, расположенными у подставки.

Если резкий рывок (или одна из его составляющих) направлен вдоль оси Ox и грифа, под уже звучащей струной на звукоснимателях сформируются провалы звука и выпадения частот и электрические ударные волны — за счет сдвига по фазе θ . Гармонические волны преобразуются в ударные волны, а между этими пиками сформируются зоны провалов и полного отсутствия звука.

Если музыкант не играет чисто и на его струне присутствуют разнообразные неупорядоченные обертоны, любые существенные сдвиги грифа вдоль оси Ox вызовут ухудшение качества звука.

Любой сдвиг по фазе, с одной стороны, может попасть в резонансную частоту обертона и резко усилить именно его, либо вызвать формирование в электрической системе серию ударных волн и скачковых провалов звука.

Если на струне звучат неконтролируемые обертоны и музыкант не играет чисто, то резкие сдвиги инструмента вдоль грифа и оси Ox будут вызывать непредсказуемые резонансы, так как величина сдвигов по фазе каждый раз оказывается неконтролируемой.

Это будет формировать звуковые пики и провалы, которые теоретически можно подправить фильтрами и спецэффектами. Но музыкант зачастую не может один и тот же эффект рывка грифа повторить несколько раз подряд — каждый раз звучание гитары будет отличаться. Явление ставит в тупик многих, привыкших к однотипности реакции инструментов на одинаковые воздействия.

Еще один неприятный для тонкого музыкального слуха момент — то, что вне зависимости от длины звучащей струны сдвиг по фазе на длину θ для струн разной длины производится одинаковый:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2\pi n x / x_0 + 2\pi\theta / x_0)$$

$$y^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \sin(2\pi n x / x_0^* + 2\pi\theta / x_0)$$

Если струна не звучит чисто, для одной струны может сформироваться нежелательный резонанс, несовместимый со звучанием другой струны, и процесс будет неконтролируемым. Вплоть до того, что музыкант начнет проверять, правильно ли у него настроена гитара и не расстроилась ли она — но она окажется настроена.

Если же струна звучит чисто, это значит, что на ней формируются обертоны, кратные, например, только степени двойки — 1, 2, 4, 8, 16 и т. д. Гитара может находиться при этом в перегруженном режиме, который отсекает все остальные более высокие по частоте звучащие обертоны.

$$y(x) = a_1 \sin(2\pi x / x_0) + a_2 \sin(4\pi x / x_0) +$$

$$+ a_4 \sin(8\pi x / x_0) + a_8 \sin(16\pi x / x_0) + \dots$$

Предположим, что путем толчка грифа гитары строго вдоль оси Ox в перегруженную систему был внесен некоторый сдвиг по фазе на θ звучания акустических струн, в следствии чего колебания примут вид:

$$y(x) = a_1 \sin(2\pi x/x_0 + 2\pi\theta/x_0) + \\ + a_2 \sin(4\pi x/x_0 + 2\pi\theta/x_0) + a_4 \sin(8\pi x/x_0 + \\ + 2\pi\theta/x_0) + a_8 \sin(16\pi x/x_0 + 2\pi\theta/x_0) + \dots$$

В этом случае возможный резонанс одного из обертонов и серия нежелательных волн в электрической системе возникнет тогда, когда резкий сдвиг по струне совпадет с одним из обертонов — а именно, будет выполнен на длину звучащей струны, на ее половину, четверть и т. д. Во всех остальных случаях влияние сдвига выявится не настолько фатальным.

Если все звучащие струны в момент сдвига грифа вдоль оси Ox будут приблизительно одинаковой длины — а именно этого правила всегда настоятельно рекомендуют придерживаться всем лидер-гитаристам — достаточно ориентироваться на длину только одной звучащей струны.

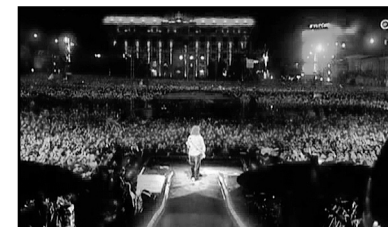
Если же музыкант во время сдвига грифа внесет управляемое звучание, близкое к длине одного из чистых звучащих обертонов, он сможет таким образом акцентировать его звучание. Если сдвиг будет выполняться не рывком, а мягким и плавным толчком, ударных волн и провалов в системе электрического звучания не возникнет.

Видно, как Брайан сдвигает гитару вдоль оси Ox со свободно звучащими струнами, акцентируя избранные звучащие обертоны, и затем пользуется вибрацией грифа и струн.



К этому моменту у большинства читателей должен возникнуть главный вопрос — почему же у большинства обычных электро-гитаристов и ритм-гитаристов вообще не получается озвучить внешнее управление электрогитары и почему акустические гитаристы зачастую не могут этого воспроизвести в принципе (даже на электрогитаре).

Напомним, что **под внешним управлением мы понимаем** не игру на струнах электрогитары пальцами, медиатором, монетами, зубами, носом, кусачками, напильником и прочее, а **принудительное формирование звуковых волн на струнах путем передачи им внешних колебательных, рывковых и толковых движений корпуса и грифа** перегруженного инструмента, с последующей передачей их в электрические цепи и далее в акустические системы



Эти внешние колебания и толчки передаются тогда, когда исполнитель совершает комплекс телодвижений, никак не связанных с игрой на струнах музыкального инструмента и вызывающих большое недоумение у неискушенных.

Колебания, которые передаются струнам со стороны корпуса и грифа инструмента, очень малые и слабые. И снятие звука при солировании производится на самых близких к подставке звукоснимателях, где амплитуда колебаний натянутых акустических струн минимальная.

Поэтому для того, **чтобы зазвучали не только акустические колебания струн, но и озвучивались ряды разложений по функциям Бесселя, акустические колебания должны быть слабыми и тихими** — на неподключенном инструменте практически беззвучные и почти неслышимые. А дальше сверхслабые результирующие колебания передаются в электросистему и в несколько этапов постепенно усиливаются электроцепями.

Когда лидер-гитарист, кажется, бьет и рвет струны, на самом деле он их **едва-едва касается**, и без усилителей его инструмент окажется практически неслышимым.



Даже когда Брайан Мэй играет на акустическом инструменте, он едва-едва касается пальцами струн.

Звучание обеспечивает сложная система встроенных внутрь пустотелого корпуса акустической гитары акустических микрофонов, которые передают аналоговый сигнал в систему усилителей по кабелю.

Брайан не играет на акустической гитаре в обычный микрофон, так как он не обеспечивает качество передачи тихого аналогового акустического звука. Это знают и многие акустические гитаристы, которые на концертных площадках и в студии используют микрофоны, встроенные внутрь пустотелого корпуса акустического инструмента.

Лидер-гитарист должен обеспечивать **качественный очень тихий звук**, придавая при этом струнам значительные скорости (а не амплитуды) акустических колебаний.



Большинство акустических гитаристов придают высокие амплитуды и мощность звучания струнам для того, чтобы добиться мощного и сильного звука в зале. Гитаристы, играющие на электрогитаре, тоже управляют мощностью звука подобным образом, но они сильно ограничены.

Для того, чтобы придать более акустическое или поп-совое звучание электрогитаре, гитаристы играют на звукоснимателях, максимально удаленных от подставки.

Амплитуда акустических колебаний струн в этой зоне максимальная, результирующий электрический сигнал получается наиболее мощным, и все посторонние вибрации струны не оказывают никакого существенного влияния на их общее звучание (даже если звучание электрическое).

Ритм-гитаристы выбирают компромисс и играют на средних звукоснимателях. Для того, чтобы попытаться солировать, гитаристы переключают режим звукоснимателей в крайнее положение, а наиболее смелые при этом увеличивают мощность, выворачивая регулятор практически до упора. Если гитарист в этот момент не станет играть гораздо тише и мягче, гитара превратится в абсолютно неуправляемый и дико воющий объект (то есть заведется).

Брайан Мэй в принципе не производит переключение звукоснимателей вне зависимости от того, какие партии он исполняет на электрогитаре — солирующие, ритм-партии, рок-н-ролл или приближенные к тонкому акустическому звучанию. Он слегка регулирует мощность, оставаясь все время в закритических режимах электроинструмента.

Для того, чтобы играть приближенные к акустическим партии, он незначительно увеличивает амплитуду (силу) воздействия на струны, слегка прикручивает (уменьшает) регулятор мощности и продолжает солировать в закритическом режиме. Но даже в этом случае воздействия на струны производятся чрезвычайно легкие и слабые.

Для того, чтобы выполнить фрагменты ритм-партий, Брайан производит практически невесомые касания струн кончиками пальцев и медиатором, не производя перестроек системы мощности сигнала вообще. Вот такая техника.

И чтобы не таскать за собой провода, передача звука выполняется по проводу в предусилитель, размещенный сзади на ремне, а дальше — через эфир и радиоволны в систему штатных усилителей. Это требует еще большей чистоты и качества звучания самого инструмента.

Математиков и теоретических физиков хочу отослать к главе 2 и разделу «Поведение осциллятора под действием внешней силы» классического учебника Г. Пейна «Физика колебаний и волн», чтобы рассмотреть осциллятор, который совершает вынужденные колебания под действием различных сил. Этот механический осциллятор описывается в декартовой, а не цилиндрической системе координат.

Математические физики рассматривают более тонкие дифференциальные уравнения второго порядка, содержащие оператор Лапласа, и изучают краевую задачу Коши. Харьковские математики также учат теорию оптимального управления.



Кстати, очень значительный и концептуальный вклад в развитие теории оптимального управления внес выдающийся современный харьковский математик Коробов. Я имела счастье слушать его лекции и доказательство теоремы Коробова-Люнбергера из первых уст и обсуждать с этим неординарным ученым прикладные аспекты этой теории и его теорем. Элементы теории оптимального управления математически поясняют мнимые парадоксы современной перегруженной электрогитары. Главный вопрос стоит в том, чтобы это **управление действительно существовало**.

Хочу также выразить благодарность еще одному выдающемуся харьковскому математику — академику Марченко, который уже на первом курсе смог заинтересовать меня проблемами рекуррентных отношений и преобразований Дарбу **для уравнения и задачи Штурма-Лиувилля**.

Благодаря этому на старших курсах мне удалось получить обобщенное преобразование Дарбу для обобщенной задачи Штурма-Лиувилля как с ненулевыми, так и с нулевыми собственными значениями. Это также привело к рассмотрению уравнения Бесселя как частного случая задачи Штурма-Лиувилля в цилиндрических координатах.

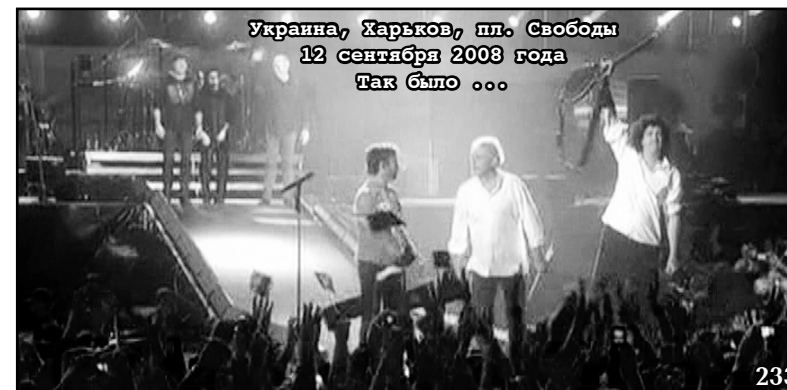
И, естественно, хочу выразить благодарность Брайану Мэю, Роджеру Тейлору и Полу Роджерсу за то, что они приехали в Харьков и именно в нашем городе продемонстрировали интересное звучание современной электрической музыки XX и XXI века.



Профессиональные секреты очень тихого и одновременно очень качественного звукоизвлечения для электрогитариста и другого музыканта, так же как и приемы соответствующих тонких вибрирующих движений корпусом электрогитары, не относятся к сфере прикладной математики и математической физики, поэтому не будут излагаться в данном издании. Они не излагаются даже в учебниках.

Поэтому я ограничусь констатацией факта, что такие приемы существуют и в принципе доступны для нормальных исполнителей, использующих их на любых музыкальных инструментах — будь то электрифицированная акустическая гитара или полноценная электрическая гитара, пианино с микрофоном или электронный клавишный синтезатор, акустические и иные барабаны или другие инструменты.

Качество инструмента здесь играет большую роль, но техника исполнительского мастерства человека имеет приоритетное и концептуально более важное значение. Именно так человек управляет музыкальными инструментами.



З а к л ю ч е н и е

Третья часть книги, хотя и носит сугубо профессиональное название, рассчитана в первую очередь не столько на прикладных математиков и физиков, сколько на максимально широкий круг подготовленных читателей и специалистов.

Изложение материала в третьей части носит максимально упрощенный и текстовый характер, приводится очень большое количество разнообразных иллюстраций, графиков и схем, наглядно поясняющих сложные моменты. Формулы и доказательства были сведены к минимуму.



Объединяет все эти разнородные темы использование волнового аппарата современной математической физики, аппарата специальных функций математической физики и подход с точки зрения теории обобщенных функций, теории фазовых переходов и катастроф и элементов современной теории оптимального управления (для дифференциальных уравнений и их систем).

Базовым является использование линейных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных, оператора Лапласа в цилиндрических и сферических координатах, краевой задачи Коши и уравнения Бесселя с применением разложений по специальным функциям современной математической физики.

Подробное изложение для математиков и специалистов смежных дисциплин современного аппарата специальных функций — без излишнего удаления в дебри сугубо теоретических вопросов — было отделено от настоящего изложения и приводится в первых двух частях настоящего издания. Первые две части написаны научным языком, носят строгий характер и последовательно доказывают все приводимые логические рассуждения, теоремы, методы и формулы.

Третья часть книги написана более человеческим и понятным многим языком, в ней не приводятся строгие доказательства и избыточные научные выкладки.

Издание является результатом более 20 лет моей научной работы в данных направлениях, которые ведутся одновременно с основной работой. Я работаю веб-программистом, веб-дизайнером, пишу программы на JavaScript, выполняю работы, связанные с компьютерной версткой высокой сложности и профессиональным дизайном под полиграфические технологии. Благодаря своей основной работе сегодня я имею возможность параллельно заниматься научными исследованиями, издавать книги и сайты — без каких-либо грантов и без чьей-либо сторонней материальной поддержки.

Оглавление

Введение	4
Глава 1. «Живые камни» в Долине Смерти, США	
§ 1. Долина Смерти — природный феномен	6
§ 2. Геологические понятия сбросовых структур и рифтовых долин (грабенов)	11
§ 3. Математическая модель, описывающая природу самопроизвольного движения камней по дну сухого озера в Долине Смерти, США	19
Глава 2. Свободно распространяемые ударные волны в сплошных средах	
§ 1. Цунами — страшная разрушительная аномалия	39
§ 2. Математическая модель, описывающая поведение цунами	44
§ 3. Модель поведения приповерхностных сейсмических волн — явление землетрясения	64
§ 4. Модель формирования волн цунами	76
§ 5. Модель распространения волн цунами	107
§ 6. Ударные волны в атмосфере Земли	133
Глава 3. Вихревые ударные волны в атмосфере	
§ 1. Торнадо и смерчи — вихревые природные аномалии	140
§ 2. Модель формирования и поведения торнадо	147
§ 3. Поведение вихрей, смерчей и торнадо	162
Глава 4. Управляемые колебания натянутых струн *	
§ 1. Поведение натянутой струны современных музыкальных инструментов	182
§ 2. Формирование звука современной электрогитары	193
Заключение	234

**Написано нормальным языком
для нематематиков**

*) Глава 4 приводится в сокращенном и строгом академическом варианте

Юлия Викторовна Кафтанова

Специальные функции математической физики
Издание осуществляется в трех частях

Часть 1. Функции Бесселя и цилиндрические функции
в элементарном изложении с программами вычислений

Часть 2. Ортогональные полиномы и другие сферические функции
в элементарном изложении с программами вычислений

Части 1 и 2 рассчитаны на специалистов, инженеров и математиков. В них строго излагается авторский метод рекуррентных отношений для специальных функций математической физики и особенности их применения на практике.

Часть 3. Моделирование аномальных и экстраординарных
природных и техногенных процессов

Часть 3 носит научно-популярный характер и рассчитана в первую очередь на нематематиков. Она написана понятным языком и рассказывает о таких явлениях, как движущиеся камни в Долине Смерти, цунами, волны-убийцы, землетрясения, торнадо, смерчи и шквалы в атмосфере с точки зрения матфизики.

Для профессиональных музыкантов и любителей современной музыки строится математическая модель звучания современной постхендриксовской электрогитары.

К части 3 бесплатно прилагается компакт-диск с цветными компьютерными иллюстрациями, фотографиями и видеоматериалами очевидцев.

Юлия Викторовна Кафтанова

Специальные функции математической физики

Часть 3. Моделирование аномальных и экстраординарных
природных и техногенных процессов

ЧП Издательство «Новое слово», Харьков

Редактор выпуска: Антон Анатольевич Кафтанов

Дизайн обложки и компьютерная верстка: Ю.В. Кафтанова

Для писем: Кафтанова Ю.В., а/я 10911, Харьков, 61003, Украина

Наши электронные адреса: www.ois.org.ua, www.mat.net.ua

Тел. в Харькове: +38 050 13579-29, +38 050 0463-643

E-mail: webois@bk.ru, korum68@bk.ru

Печать обложки: типография «Планета Принт»

Сдано в набор 28.10.2008. Подписано в печать 19.01.2009.

Формат 84x118/32. Бумага офсетная. Печать лазерная.

Гарнитура "NewBaskerville". Усл. авт. л. 9,9.

Тираж 500 экз.

ISBN 978-966-2046-62-5



9 789662 046625 >

Любое использование материалов настоящей книги разрешается только с обязательной ссылкой на автора текста и настоящее научно-популярное издание. Использование фото в данном издании производится исключительно в научных целях — никакие фото из этого издания не могут быть скопированы и использованы третьими лицами для иных целей.

ISBN 978-966-2046-62-5

Столб торнадо



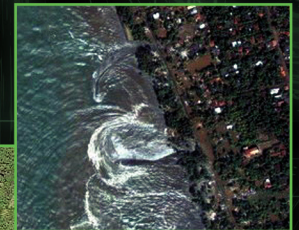
WWW.MAT.NET.UA



«Живые
камни»
в Долине
Смерти,
США



Цунами в
прибрежной
зоне



Ударная волна
в атмосфере



Управляемые колебания
натянутой струны

