

Юлия Кафтanova

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

```
<script type="text/javascript">
function NBessel(x, n, eps)
{
  var Emax = 1E-12;
  var Emin = 1E-6;
  if (n == null) n = 0;
  if (eps > Emax) eps = Emax;
  if (eps < Emin) eps = Emin;
  x = Math.abs(x);
  n = Math.abs(n);
  n = Math.floor(n);
  var ak = 1; var s = 0;
  var k = 0; var i = 1;
```

```
for (i = 1; i <= n; i++) ak = ak * x / 2 / i;
while (Math.abs(ak) > eps)
{
  s = s + ak;
  k = k + 1;
  ak = ak * x / 2 / i;
```

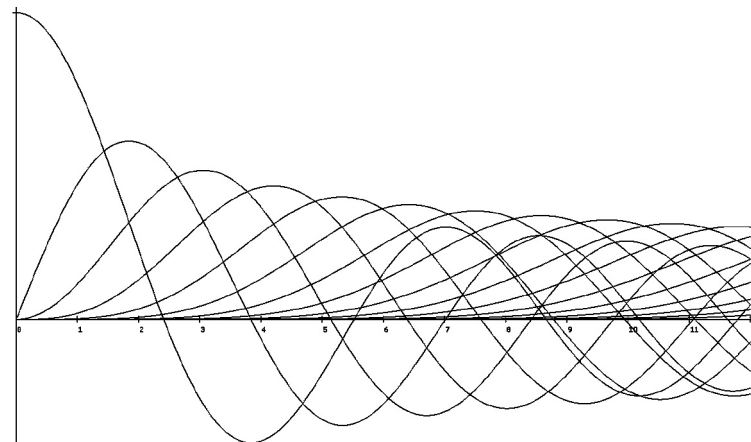
ЧАСТЬ 1
ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ
и цилиндрические функции
в элементарном изложении
с программами вычислений

```
</script>
```

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ЧАСТЬ 1

ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ
и цилиндрические функции
в элементарном изложении
с программами вычислений



ЧП Издательство «Новое слово»
Харьков
2009

УДК 531.0
ББК 22.311
К-305



Free preview: BarcodeRobot.com 2004-2015 ©
ISBN 978-966-2046-62-5



webois K.305
ORCID 0000-0003-4306-1738

Кафтanova Ю. В.

К-305 Специальные функции математической физики. Научно-популярное издание. — Х.: ЧП Издательство «Новое слово», 2009. — 596 с.

ISBN 978-966-2046-62-5

Издание рассматривает метод рекуррентных отношений для специальных функций математической физики и особенности использования специальных функций для моделирования различных природных и техногенных процессов.

Часть 1 рассматривает цилиндрические функции Бесселя и Неймана. Часть 2 изучает поведение сферических функций и ортогональных полиномов. Приводятся авторские программы вычислений, написанные на языке JavaScript.

В части 3 изучается применение специальных функций для математического моделирования природных катаклизмов — цунами, землетрясений, торнадо, смерчей и для исследования поведения движущихся камней в Долине Смерти, США. Также строится математическая модель звучания и управления электрогитары с использованием современного аппарата специальных функций математической физики.

Рассчитано не только на специалистов-математиков, но и на широкий круг подготовленных читателей.

УДК 531.0
ББК 22.311

© Кафтanova Ю.В., 1992-2009
© ЧП Издательство «Новое слово», 2009

ISBN 978-966-2046-62-5

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Общие понятия и теоремы	
§ 1. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка	7
§ 2. Получение рекуррентных отношений для решений уравнения Штурма-Лиувилля с ненулевым собственным значением	12
§ 3. Гамма-функция Эйлера, краткий обзор	20
Глава 2. Общие понятия и теоремы	
§ 1. Рекуррентные отношения для функций Бесселя	21
§ 2. Функции Бесселя с полуцелым индексом	29
§ 3. Асимптотическое поведение и явное выражение через степенные и тригонометрические ряды функций Бесселя с полуцелым индексом	37
§ 4. Функции Бесселя с полуцелым индексом, неограниченные в нуле	41
§ 5. Разложение в степенные ряды функций Бесселя с произвольным индексом	45
§ 6. Цилиндрические функции Неймана	52
§ 7. Другие цилиндрические функции	57
§ 8. Поведение цилиндрических функций в окрестности нуля	60
§ 9. Корни решений уравнения Бесселя	62
§ 10. Асимптотическое поведение функций Бесселя и Неймана	75
§ 11. Приведение дифференциальных уравнений второго порядка к уравнению Бесселя	84
§ 12. Итоговые результаты главы	112
Глава 3. Другие аспекты уравнений Бесселя и цилиндрических функций	
§ 1. Приведение дифференциальных уравнений старших порядков к уравнению Бесселя	116
Глава 4. Программы и алгоритмы вычислений	
§ 1. Общая постановка задачи вычислений	122
§ 2. Программное вычисление функций Бесселя	125
§ 3. Программное вычисление функций Неймана	148
Заключение	162
Об авторе	178

Введение

Сегодня в качестве математического аппарата во многих отраслях современной прикладной математики, математической физики и технических приложениях широко используются функции Бесселя и цилиндрические функции. Области приложения этих функций крайне разнообразны. Они обеспечивают очень быструю и корректную сходимость решений целого ряда прикладных задач, которые могут быть так или иначе сведены к уравнению Бесселя. Интерес математиков и инженеров к специальным функциям матфизики не угасает.

Немного истории. В 1732 году математик Даниил Бернулли в задаче о колебаниях вертикально подвешенной тяжелой гибкой нити пришел к уравнению, описывающему амплитуду колебаний нити на различных расстояниях от точки подвеса:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + \omega u(x) = 0$$

В 1764 году математик Л. Эйлер встретился с обыкновенным линейным дифференциальным уравнением второго порядка следующего вида:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) u(x) = 0$$

В 1822 году математик Ж. Фурье рассмотрел проблему распределения температуры в нагретом цилиндре, который охлаждается при определенных условиях. Ж. Фурье получил уравнение такого же вида, как и Д. Бернулли, и описал его решение способом разложения в ряд. Особенность решения данного уравнения состоит в том, что оно не может быть выражено с помощью элементарных функций — степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических, гиперболических или их комбинаций.

После того, как в 1824 году математик В. Бессель наиболее последовательно рассмотрел эти решения и выделил их в отдельный класс, впоследствии они получили название Бесселевых (или цилиндрических) функций, а уравнение получило название уравнения Бесселя:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

Конец XIX и XX век ознаменовался тем, что при поиске решений огромного количества задач прикладной математики и математической физики математики и инженеры стали использовать очень быстро сходящиеся ряды функций Бесселя и цилиндрических функций.

При помощи рекуррентных формул были составлены таблицы значений Бесселевых функций. Особенно актуально вопрос практического применения функций Бесселя встал при широком использовании компьютерных технологий — для расчета прикладных физических задач. И все внимание разработчиков было сосредоточено в первую очередь на прикладных работах, а не на разработке общей теории.

В течение длительного времени во многих популярных трудах типичное изложение теории Бесселевых функций сводилось к следующему. Вначале давались общие формулы, описывающие некоторые интересные и удобные функции математической физики, затем на их основании выводились рекуррентные соотношения, после чего доказывалось, что эти функции являются решением уравнения Бесселя. То есть изложение теории Бесселевых функций шло в обратном порядке — от конкретного решения уравнения Бесселя к исходному виду уравнения.

Некоторое время назад автору удалось разработать **метод рекуррентных отношений** и получить рекуррентные отношения для цилиндрических функций и функций Бесселя, не используя напрямую их значения, а исходя **исключительно из общего вида уравнения Бесселя**. На сегодня это **самый простой и короткий способ** получения рекуррентных соотношений Бесселевых функций. Для его понимания достаточны общие знания теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Автор занималась исследованиями обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка и их частного случая — уравнения Штурма-Лиувилля, широко используемого в современной математической физике:

$$y''(x) + g(x)y(x) = \lambda y(x)$$

где λ — собственные значения уравнения.

Изучалась возможность разработки и применения метода рекуррентных отношений для решений уравнения Штурма-Лиувилля с использованием одного из двух линейно-

независимых решений дифференциального уравнения (наиболее очевидного) для собственных значений и преобразования Дарбу.

Для того, чтобы исследовать удобство и корректность предлагаемого аппарата в тривиальном случае $\lambda \neq 0$ на конкретных примерах, было рассмотрено уравнение Бесселя. Оно было сведено к уравнению Штурма-Лиувилля. После этого была применена Первая базовая теорема. Таким образом, удалось получить хорошо известные рекуррентные соотношения для функций Бесселя, используя только общий вид уравнения Бесселя (и Штурма-Лиувилля) и одно тривиальное (линейно-независимое) решение уравнения.

Исследование более сложного случая $\lambda = 0$ и применение к нему обобщенной Второй базовой теоремы позволило на основании общего уравнения явно выписать рекуррентные отношения для других популярных специальных функций — ортогональных полиномов. Ознакомление с этим методом кратко изложено в Заключении и подробно во 2 части издания.

Чтобы понимание метода рекуррентных отношений для специальных функций было четким и независимым от других источников, автор приводит отдельные элементы теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка и краткий обзор Гамма-функций (функций Эйлера) с графиками.

Данный подход к рассмотрению специальных функций является нетрадиционным, но в силу удобства его применения может быть использован в дальнейшем для самого широкого круга задач математической физики, сводимых к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям второго порядка и в частности к уравнению Штурма-Лиувилля или уравнению Бесселя.

Приводимый автором метод рекуррентных отношений очень удобен для задач компьютерной алгоритмизации и автоматизированных расчетов прикладных задач. В последних главах приводятся алгоритмы вычислений значений цилиндрических функций, разработанных автором на языке JavaScript. Приведенные в работе вычисления выполнены при помощи этого современного аппарата.

Глава I Общие понятия и теоремы

§ 1. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Перед тем, как приступить к рассмотрению уравнения Бесселя, остановимся на некоторых аспектах обыкновенных линейных дифференциальных уравнениях второго порядка, частным случаем которых и является уравнение Бесселя. Мы будем изучать случай, при котором вторая производная не вырождена и само уравнение не является уравнением первого порядка.

$$f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = f(x)$$

где $f_2(x)$ — невырожденная функция, тождественно не равная нулю.

Дифференциальным уравнениям, особенно невырожденным линейным, посвящается обширная литература и многочисленные научные труды. Поэтому мы остановимся только на тех аспектах, которые будут необходимы для понимания метода рекуррентных соотношений.

Обыкновенное дифференциальное уравнение выражает зависимость между независимой переменной, функцией переменной и производными функции. Порядок дифференциального уравнения определяется высшей входящей в его состав производной функции.

Порядок дифференциального уравнения определяется высшей входящей в его состав производной функции. Если в уравнении переменная и ее производные входят только в первой степени, такое уравнение называется линейным. Соответственно коэффициенты линейного уравнения — это константы или функции независимой переменной $f(x)$.

Некоторые нелинейные уравнения, содержащие дробные степени, могут быть приведены к обыкновенным линейным уравнениям второго порядка путем избавления от степенных дробей. В этом случае перед рассмотрением уравнения нужно попытаться избавиться от дроби.

Частным случаем линейных дифференциальных уравнений являются однородные дифференциальные уравнения, в которых $f(x) = 0$. Для получения решения неоднородного уравнения используется решения однородного уравнения, поэтому аспект $f(x) = 0$ немаловажен.

Решением невырожденного обыкновенного однородного дифференциального уравнения второго порядка является комбинация двух частных линейно-независимых решений:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

где c_i — некоторые константы, $y_i(x)$ — пара линейно-независимых решений уравнения. Мы не приводим доказательство этого утверждения.

Существенным моментом применения метода рекуррентных отношений является сведение невырожденного обыкновенного однородного дифференциального уравнения второго порядка к частному случаю — уравнению Штурма-Лиувилля. В связи с этим встают концептуальные вопросы существования собственных значений и собственных функций данного уравнения. В дальнейшем мы предполагаем, что все необходимые для доказательства производные и интегралы существуют.

Теорема 1. Обыкновенное невырожденное линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка вида:

$$f_2(x) z''(x) + f_1(x) z'(x) + f_0(x) z(x) = 0 \quad (1.1.1)$$

может быть единственным образом приведено к уравнению Штурма-Лиувилля:

$$y''(x) + g(x)y(x) = \lambda y(x) \quad (1.1.2)$$

где $g(x)$ — функция, λ — некоторая константа.

Для этого используется замена:

$$z(x) = P(x)y(x) \quad (1.1.3)$$

$$\text{где } P(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int \frac{f_1(\xi)}{f_2(\xi)} d\xi\right) \quad (1.1.4)$$

$$\text{и } f_2(x) \neq 0$$

Функция $g(x)$ и собственное значение могут быть записаны одним из двух эквивалентных выражений:

$$g(x) + \lambda = \beta(x) - \frac{1}{4}(\alpha^2(x) + 2\alpha'(x)) \quad (1.1.5)$$

$$g(x) + \lambda = P^{-1}(x)(P''(x) + \alpha P'(x) + \beta P(x)) \quad (1.1.6)$$

При этом необходимо заметить, что к одному и тому же виду уравнения Штурма-Лиувилля могут быть приведены различные виды однородных невырожденных линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Приведем доказательство. Для этого избавимся от неединичной функции при второй производной:

$$z''(x) + z'(x)f_1(x)/f_2(x) + z(x)f_0(x)/f_2(x) = 0$$

$$\text{Обозначим: } \alpha = f_1(x)/f_2(x) \quad (1.1.7)$$

$$\beta = f_0(x)/f_2(x) \quad (1.1.8)$$

Тогда базовое уравнение (1.1.1) примет вид:

$$z''(x) + \alpha z'(x) + \beta z(x) = 0$$

Затем подставим замену (1.1.3) в дифференциальное уравнение (1.1.1) и наложим дополнительные условия. Уравнение примет следующий вид:

$$\begin{aligned} 0 &= z''(x) + \alpha z'(x) + \beta z(x) = \\ &= (Py(x))'' + \alpha (Py(x))' + \beta (Py(x)) = \\ &= P''y(x) + 2P'y'(x) + Py''(x) + \alpha P'y(x) + \\ &\quad + \alpha Py'(x) + \beta Py(x) = 0 \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Для получения уравнения Штурма-Лиувилля мы должны потребовать, чтобы значение потенциала при первой производной функции $y'(x)$ тождественно равнялось нулю для всех значений переменной, а именно:

$$y'(x) (2P' + \alpha) \equiv 0$$

Поскольку изначально мы предполагаем, что исходное дифференциальное уравнение (1.1.1) и замена (1.1.3) не вырождены, функция $y'(x)$ не может быть тождественным нулем. В противном случае $y(x) = \text{const}$ и исходное уравнение вырождается. Поэтому для существования замены мы должны потребовать тождественного равенства нулю следующего полученного нами выражения:

$$2P'(x) + \alpha(x) = 0 \quad (1.1.10)$$

Очевидно, что мы получили однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Таким образом, задача сведения дифференциального уравнения к уравнению Штурма-Лиувилля потребовала решения простого линейного дифференциального уравнения первого порядка (1.1.10).

Из теории дифференциальных уравнений известно, что такое решение существует и оно единственное (с точностью до множителя-константы). Единственность этого решения доказывает единственность существования замены (1.1.3) и единственность способа приведения уравнения (1.1.1) к уравнению Штурма-Лиувилля (1.1.2). Оно выражается:

$$P(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int \alpha(\xi) d\xi\right) \quad (1.1.11)$$

Непосредственно подставив сюда значение $\alpha(\xi)$ в соответствии с введенными нами ранее обозначениями (1.1.7), мы получим исходную формулу (1.1.4) для замены (1.1.3).

Таким образом, мы в явной форме установили замену, которая в уравнении (1.1.9) обеспечивает нулевой потенциал при первой производной, и доказали единственность такой замены. Теперь запишем полученное уравнение (1.1.9) без первого потенциала:

$$P''y(x) + Py''(x) + \alpha P'y(x) + \beta Py(x) = 0$$

Перегруппируем члены при одинаковых потенциалах для получения уравнения Штурма-Лиувилля явно:

$$Py''(x) + (P'' + \alpha P' + \beta P)y(x) = 0$$

$$\text{Или } y''(x) + \frac{P'' + \alpha P' + \beta P}{P} y(x) = 0 \quad (1.1.12)$$

Очевидно, что значение нулевого потенциала в уравнении Штурма-Лиувилля можно выразить явным отношением:

$$g(x) + \lambda = \frac{P''(x) + \alpha P'(x) + \beta P(x)}{P(x)} \quad (1.1.5)$$

Таким образом, после подстановки в это соотношение значений (1.1.11), (1.1.7) и (1.1.8) получаем выражение:

$$g(x) + \lambda = \beta(x) - \frac{1}{4}(\alpha^2(x) + 2\alpha'(x)) \quad (1.1.6)$$

Теорема доказана. Решение уравнения Штурма-Лиувилля определяется с точностью до константы, так как уравнение является однородным, и единственность представления понимается именно в этом смысле.

Примечание. В выражениях (1.1.5) и (1.1.6) мы получаем не только некоторый потенциал $g(x)$, но и константу λ , которую по возможности необходимо выделить отдельно. Это собственное значение уравнения Штурма-Лиувилля.

Заметим, что и потенциал $g(x)$, и собственное значение λ могут принимать произвольное (в том числе нулевое) значение.

Наличие пары невырожденных решений, соответствующих некоторому ненулевому собственному значению λ , позволит в дальнейшем применять упрощенную формулу для построения рекуррентных отношений для решений уравнения Штурма-Лиувилля. Эти отношения будут рассмотрены в Первой базовой теореме. Именно они используются для получения рекуррентных отношений для решений уравнения Бесселя (цилиндрических функций).

Если ненулевую константу λ выделить невозможно, уравнение имеет нулевое собственное значение $\lambda = 0$, то рекуррентные отношения для его решений могут быть получены по общей (более сложной) формуле преобразований. Этот более общий случай изучается во Второй базовой теореме построения рекуррентных отношений для решений уравнения Штурма-Лиувилля.

Для сведения неоднородного дифференциального уравнения так же используются формулы Теоремы 1.

§ 2. Получение рекуррентных отношений для решений уравнения Штурма-Лиувилля с ненулевым собственным значением

Рекуррентные отношения для однородных дифференциальных уравнений второго порядка с ненулевым собственным значением.

Первая базовая теорема

Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения второго порядка (уравнения с дифференциалом по одной переменной) широко используются в прикладных задачах современной математической физики. Кроме того, метод разделения переменных в дифференциальных уравнениях с частными производными при их аналитическом решении часто приводит именно к уравнениям такого рода.

При решении уравнений второго порядка довольно часто приходится рассматривать дифференциальные уравнения первого порядка. Поэтому важность дифференциальных уравнений первого и второго порядка для современной прикладной математики неоспорима, интерес к ней исследователей не угасает.

Существуют четыре основных общепринятых **метода** решения дифференциальных уравнений, имеющих переменные коэффициенты.

1. Прямое численное решение (аналитическое или с использованием компьютерных технологий). Это может стоить большого труда и потребовать серьезных усилий, но во многих случаях просто нет другого выбора.

2. Решение с помощью сходящихся степенных и иных рядов (или по ортонормированному базису функций, в обобщенном смысле).

3. Путем подстановки интегралов различного вида.

4. Асимптотические решения и разложения.

Автор предлагает пятый способ получения решений для линейных дифференциальных уравнений второго порядка — метод рекуррентных отношений.

Его применение будет осуществлено для исследования уравнения Бесселя и прямого получения рекуррентных отношений для цилиндрических функций.

Крайне эффективным применение метода рекуррентных отношений является именно в том случае, когда нам известно одно из двух частных линейно-независимых решений линейного дифференциального уравнения второго порядка. Оно может быть получено либо аналитически, либо с использованием численных методов решения.

При помощи данного метода могут быть получены бесконечные цепочки, линейным образом связывающие неочевидные решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка друг с другом, и в частности решения уравнения Штурма-Лиувилля.

В теории специальных функций и линейных дифференциальных уравнений второго порядка часто сталкиваются с тем, что одно из двух частных линейно-независимых решений дифференциального уравнения либо очевидно, либо достаточно легко находится. Однако практическое значение этого решения ранее не рассматривалось и считалось ничтожным по значению.

Для решения практических задач требуется отыскание второго частного линейно-независимого решения, часто являющегося неочевидным. В наиболее сложных случаях это решение не может быть получено комбинацией элементарных функций. Поэтому в большинстве случаев простое первое частное линейно-независимое решение уравнения оставалось без должного внимания.

Метод рекуррентных отношений основное внимание уделяет именно этому простому частному решению дифференциального уравнения. В том случае, когда одно из частных решений либо заранее известно, либо очевидно и достаточно легко находится, данный метод может быть с успехом применен.

Для того, чтобы применить метод рекуррентных отношений, мы вначале должны свести невырожденное линейное дифференциальное уравнение второго порядка к частному случаю — уравнению Штурма-Лиувилля с использованием Теоремы 1. Далее мы исследуем полученное уравнение Штурма-Лиувилля.

Теорема 2. Первая базовая теорема. Для решения исходного уравнения Штурма-Лиувилля с невырожденным собственным значением λ :

$$y''(x) + g(x)y(x) = \lambda y(x) \quad (1.2.1)$$

где $g(x)$ — некоторая функция переменного x и λ — ненулевое собственное значение $\lambda \neq 0$ существует рекуррентное отношение вида

$$z(x) = A(x)y(x) - y'(x) \quad (1.2.2)$$

$$\text{где } A(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \quad (1.2.3)$$

и выполняется тождество:

$$A^2(x) + A'(x) = -g(x) + \mu \quad (1.2.4)$$

Мы можем записать отношение в другой форме:

$$z(x) = -\varphi(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{y(x)}{\varphi(x)} \right) \quad (1.2.5)$$

Функция $\varphi(x)$ является невырожденным ненулевым частным линейно-независимым решением уравнения (1.2.1), возможно с другим собственным значением — некоторой константой μ :

$$\varphi''(x) + g(x)\varphi(x) = \mu\varphi(x) \quad (1.2.6)$$

при условии $\varphi(x) \neq \chi y(x)$, где $\chi = \text{const}$

Рекуррентное отношение вида (1.2.2) и (1.2.5) приводит к результирующему уравнению Штурма-Лиувилля:

$$z''(x) + q(x)z(x) = \lambda z(x) \quad (1.2.7)$$

для которого выполняется:

$$q(x) = g(x) + 2A'(x) \quad (1.2.8)$$

$$q(x) = -g(x) - 2A^2(x) + 2\mu \quad (1.2.9)$$

Примечание. Для поиска рекуррентных отношений в этой теореме мы используем классическое преобразование Дарбу (1.2.5). Мы не должны использовать настоящую теорему и преобразование Дарбу для вырожденного случая, когда нельзя выделить ненулевое собственное значение λ .

Условие невырожденности λ является существенным и критическим при доказательстве данной теоремы. Даже в том случае, когда цепочки полученных уравнений

$$y_n''(x) + g_n(x)y_n(x) = \lambda_n y_n(x)$$

приводят нас к условию $\lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$,

нужно оказаться от выполнения предельного перехода по λ_n . Для вырожденного случая $\lambda = 0$ используются модифицированные формулы и отношения, которые будут кратко изложены в Заключение.

Доказательство. При проведении доказательства мы считаем, что все необходимые производные и интегралы существуют и не вырождены. Выполним линейную замену:

$$z(x) = A(x)y(x) + B(x)y'(x) \quad (1.2.10)$$

и подставим ее в результирующее уравнение

$$\lambda z(x) = z''(x) + q(x)z(x) \quad (1.2.7)$$

Мы получаем:

$$\begin{aligned} \lambda(A(x)y(x) + B(x)y'(x)) &= \\ &= A''(x)y(x) + 2A'(x)y'(x) + A(x)y''(x) + \\ &+ B''(x)y'(x) + 2B'(x)y''(x) + B(x)y'''(x) + \\ &+ q(x)A(x)y(x) + q(x)B(x)y'(x) \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Значение $y''(x)$ очевидно из уравнения (1.2.1):

$$y''(x) = (\lambda - g(x))y(x)$$

Для того, чтобы получить значение третьей производной $y'''(x)$, мы должны продифференцировать исходное уравнение, из которого получаем:

$$y'''(x) = (\lambda - g(x))y'(x) - g'(x)y(x) \quad (1.2.12)$$

Подставим полученные выражения второй и третьей производной функции $y(x)$, чтобы избавиться от производных старшего порядка в соотношении (1.2.11)

$$\begin{aligned} \lambda(A(x)y(x) + B(x)y'(x)) &= \\ &= A''(x)y(x) + 2A'(x)y'(x) + A(x)(\lambda - \\ &- g(x))y(x) + B''(x)y'(x) + 2B'(x)(\lambda - g(x))y(x) + \\ &+ B(x)((\lambda - g(x))y'(x) - g'(x)y(x)) + \\ &+ q(x)A(x)y(x) + q(x)B(x)y'(x) \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Нам необходимо обеспечить тождественное равенство (1.2.12) для всех значений переменной x , для которых решение дифференциального уравнения существует. Это обеспечивается тождественным равенством потенциалов:

$$\begin{array}{l|l} \lambda y(x) & A(x) = A(x) + 2B'(x) \\ \lambda y'(x) & B(x) = B(x) \text{ — тождество } \forall x \\ y(x) & 0 = A''(x) - g(x)A(x) - 2g(x)B'(x) - \\ & - g'(x)B(x) + q(x)A(x) \\ y'(x) & 0 = 2A'(x) + B''(x) - g(x)B(x) + q(x)B(x) \end{array} \quad (1.2.13)$$

При рассмотрении уравнения Штурма-Лиувилля мы полагали, что собственное значение исходного уравнения невырожденное, то есть $\lambda \neq 0$. Данное требование является существенным при доказательстве этой теоремы, поскольку позволяет наложить жесткое дополнительное условие и явно получить значение $B(x)$.

Для обеспечения тождественного равенства потенциала при $\lambda y(x)$, где λ невырождено, необходимо потребовать, чтобы $B'(x) = 0$ при всех значениях переменной x .

Мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, которое имеет явное решение, равное константе при всех значениях переменной x :

$$B'(x) = 0 \Rightarrow B(x) = c, \quad \text{где } c = \text{const} \quad (1.2.14)$$

$\forall x$, на которых решение исходного уравнения Штурма-Лиувилля определено и существует.

Поскольку уравнение (1.2.14) однородное, то единственность его решения подразумевается с точностью до некоторой константы, поэтому в дальнейшем мы можем выбрать удобное для нас ее значение. Таким образом, систему уравнений (1.2.13) можно упростить и записать в виде:

$$\begin{array}{l|l} y(x) & 0 = A''(x) + A(x)(q(x) - g(x)) - cg'(x) \\ y'(x) & 0 = 2A'(x) + c(q(x) - g(x)) \end{array} \quad (1.2.15)$$

где c — некоторая произвольная константа.

Мы получили систему линейных дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций одного переменного: $A(x)$ и $q(x)$. Уравнения в однородной системе уравнений (1.2.15) линейно-независимые, решение существует и единственно с точностью до константы.

Будем решать систему уравнений (1.2.15), выразив значение неизвестной функции $q(x)$, которая входит в систему явно без своих производных:

$$\begin{array}{l|l} y(x) & g(x) + (cg'(x) - A''(x))/A(x) = q(x) \\ y'(x) & g(x) - 2A'(x)/c = q(x) \end{array} \quad (1.2.16)$$

Вычтем из первого уравнения системы (1.2.16) второе уравнение, исключив $q(x)$, и получим новое уравнение:

$$(cg'(x) - A''(x))/A(x) + 2A'(x)/c = 0$$

Мы должны предположить, что $A(x)$ тождественно не вырождается в ноль для всех значений переменной x . В противном случае мы не сможем построить невырожденное рекуррентное отношение. Таким образом, мы получаем уравнение для функции $A(x)$:

$$c^2 g'(x) - cA''(x) + 2A'(x)A(x) = 0 \quad (1.2.17)$$

Это уравнение является классическим дифференциальным уравнением, которое может быть легко решено в явной форме с использованием метода интегрирования по частям. Перепишем полученное уравнение (1.2.17) в эквивалентной формальной форме:

$$\frac{d}{dx}(c^2 g(x) - cA'(x)) + \frac{d}{dx}(A^2(x)) = 0 \quad (1.2.18)$$

Формально проинтегрируем полученное уравнение по переменной x и получим:

$$c^2 g(x) - c A'(x) + A^2(x) = \mu \quad (1.2.19)$$

где μ — некоторая произвольная константа.

Поскольку входящая в уравнение константа в силу однородности уравнения (1.2.14) является произвольной, мы можем выбрать такое ее значение, что

$$|c| = 1 \text{ и соответственно } c^2 = 1, \quad c = \mp 1 \quad (1.2.20)$$

Поэтому уравнение (1.2.19) будет записано в виде:

$$A^2(x) - c A'(x) = \mu - g(x) \quad (1.2.21)$$

Мы получили нелинейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка. Используем метод замены переменных и положим

$$A(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \quad \text{где } \varphi(x) \text{ — функция} \quad (1.2.3)$$

Подставим замену в уравнение (1.2.21) и получим:

$$\left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right)^2 - c \frac{\varphi''(x) \varphi(x) - \varphi'(x) \varphi'(x)}{\varphi^2(x)} = \mu - g(x)$$

После упрощения получаем следующее уравнение:

$$-c \varphi''(x) = \varphi(x) (\mu - g(x))$$

Исходя из положения (1.2.20) и положив $c = -1$, мы получаем уравнение Штурма-Лиувилля с исходным потенциалом $g(x)$ и собственным значением μ :

$$\varphi''(x) + g(x) \varphi(x) = \mu \varphi(x) \quad (1.2.6)$$

Как говорилось ранее, существует целый класс линейных дифференциальных уравнений второго порядка, для которых можно достаточно легко найти очевидное частное решение, которое само по себе не имеет практического значения. Простое решение может быть задано заранее.

Уравнение (1.2.6) показывает, что для построения рекуррентных отношений неочевидных решений уравнения Штурма-Лиувилля необходимо знать второе (простое и очевидное)

решение данного уравнения с другим собственным значением μ , возможно отличным от λ .

Если мы знаем такое решение в явной форме, то рекуррентное отношение может быть единственным образом записано в форме

$$z(x) = A(x) y(x) - y'(x) \quad (1.2.2)$$

$$\text{или } z(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} y(x) - y'(x) \quad (1.2.22)$$

Данное рекуррентное отношение является преобразованием Дарбу для уравнения Штурма-Лиувилля. Оно может быть записано в форме оператора (1.2.5).

В ходе доказательства также были получены соответствующие связующие уравнения (1.2.4), (1.2.8) и (1.2.9) для $q(x)$. Таким образом, **теорема доказана**.

Отметим, что представление частного линейно-независимого решения уравнения в явной форме является избыточным требованием и может быть существенно ослаблено — для представления в явной форме рекуррентных отношений достаточно решить нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$A^2(x) + A'(x) = -g(x) + \mu \quad (1.2.4)$$

с некоторой произвольной константой μ . Если удастся получить решение этого нелинейного дифференциального уравнения первого порядка в явной форме, то поиск одного из двух линейно-независимых решений исходного уравнения Штурма-Лиувилля с невырожденным собственным значением необязательно.

Существование и невырожденность всех производных и интегралов, необходимых для корректного изложения и доказательства теоремы 2, должно быть отдельно доказано для каждого конкретного случая практического применения теоремы 2, так как в ходе доказательства предполагалось существование и невырожденность этих производных и интегралов в общем смысле.

Чтобы получить рекуррентные отношения для однородных дифференциальных уравнений второго порядка, при помощи теоремы 1 их необходимо свести к виду (1.2.1).

§ 3. Гамма-функции Эйлера, краткий обзор

Сейчас мы отвлечемся от темы дифференциальных уравнений для краткого описания гамма-функции Эйлера, непосредственно использующаяся в представлении решений уравнения Бесселя.

Гамма-функция Эйлера является обобщением понятия факториала, распространенного с натуральных чисел на весь числовой ряд. Известно, что для натуральных чисел факториал описывается соотношением:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad (1.3.1)$$

Для факториала выполняется основное рекуррентное отношение:

$$n! = n \cdot (n-1)! \quad (1.3.2)$$

Гамма-функцией Эйлера называется интеграл Эйлера II рода, для которого выполняется аналогичное рекуррентное отношение:

$$\Gamma(u+1) = u\Gamma(u) \quad (1.3.3)$$

Для всех натуральных чисел n выполняется:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{и} \quad \Gamma(1) = 1 \quad (1.3.4)$$

Гамма-функция Эйлера для переменных t и действительных и комплексных параметров u определяется через несобственный интеграл, который сходится, и предел:

$$\Gamma(u+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^u dt \quad (1.3.5)$$

$$\Gamma(u) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m! m^u}{u(u+1) \dots (u+m)} \quad (1.3.6)$$

$$\Gamma(u) \cdot \Gamma(1-u) = \pi / \sin \pi u \quad (1.3.7)$$

Глава II

Уравнение Бесселя, функции Бесселя и другие цилиндрические функции

§ 1. Рекуррентные отношения для функций Бесселя

Рассмотрим некоторое однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$x^2 z''(x) + x z'(x) + (x^2 - \nu^2) z(x) = 0 \quad (2.1.1)$$

где ν — некоторая константа (можно считать, что эта константа неотрицательна $\nu \geq 0$), а $y(x)$ — функция.

Это уравнение не интегрируется при любом значении параметра ν при помощи элементарных функций. Мы будем рассматривать решение этого уравнения как самостоятельные функции аргумента x . Эти функции, зависящие от переменной x и параметра ν , называются функциями Бесселя или цилиндрическими функциями, а уравнение (2.1.1) называется уравнением Бесселя.

Уравнение Бесселя также записывается в форме:

$$z''(x) + \frac{1}{x} z'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) z(x) = 0 \quad (2.1.2)$$

Изучая уравнение (2.1.2), можно заметить, что его коэффициенты непрерывны всюду, кроме точки $x=0$, а само уравнение невырожденное линейное.

Много прикладных задач, решение которых связано с уравнениями Лапласа, волнового уравнения, уравнений теплопроводности, систем волновых уравнений в сферических, конических и цилиндрических координатах, некоторых других уравнений в частных производных при разделении переменных приводит к уравнению Бесселя и цилиндрическим функциям действительного и комплексного переменного.

Функции Бесселя продолжают привлекать к себе внимание исследователей, так как при разложении в ряд по ним обеспечивают быструю и корректную сходимость.

В настоящей главе мы получим классические рекуррентные отношения для функций Бесселя с положительным параметром ν , исходя только из общего вида уравнения Бесселя. Для этого мы сведем уравнение Бесселя к уравнению Штурма-Лиувилля при помощи теоремы 1, а затем явно запишем рекуррентные отношения при помощи теоремы 2 (Первой базовой теоремы).

Обозначим $J_\nu(x)$ ограниченное в нуле решение уравнения Бесселя, которое называется функцией Бесселя, где

$$\lim_{x \rightarrow 0} |J_\nu(x)| < \infty \quad \text{и} \quad \nu \geq 0 \quad (2.1.3)$$

Лемма 1. Классическое уравнение Бесселя вида

$$x^2 J_\nu''(x) + x J_\nu'(x) + (x^2 - \nu^2) J_\nu(x) = 0 \quad (2.1.4)$$

может быть приведено к уравнению Штурма-Лиувилля

$$y_\nu''(x) - \frac{(\nu - 1/2)(\nu + 1/2)}{x^2} y_\nu(x) = -y_\nu(x) \quad (2.1.5)$$

$$\text{при помощи замены вида: } y_\nu(x) = \sqrt{x} J_\nu(x) \quad (2.1.6)$$

Доказательство. Применим теорему 1, которая сводит обыкновенное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, частным случаем которого является уравнение Бесселя, к уравнению Штурма-Лиувилля.

$$f_2(x) z''(x) + f_1(x) z'(x) + f_0(x) z(x) = 0 \quad (1.1.1)$$

где $z(x) = J_\nu(x)$ — функция Бесселя

$$\text{и } f_2(x) = x^2, \quad f_1(x) = x, \quad f_0(x) = x^2 - \nu^2 \quad (2.1.7)$$

Уравнение Штурма-Лиувилля будет иметь вид:

$$y_\nu''(x) + g_\nu(x) y_\nu(x) = \lambda_\nu y_\nu(x) \quad (2.1.8)$$

В соответствии с (1.1.3) и (1.1.4) замена примет вид:

$$J_\nu(x) = P_\nu(x) y_\nu(x), \quad \text{где } P_\nu(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int \frac{1}{\xi} d\xi\right)$$

Таким образом, для всех значений параметра ν мы получим соотношение вида:

$$P_\nu(x) = 1/\sqrt{x} \quad \text{для } \forall \nu$$

которое позволяет получить замену (2.1.6) в явном виде. Соответствующие потенциал и собственное значение уравнения Штурма-Лиувилля (1.1.2) выражается по формуле (1.1.5) с учетом принятых обозначений (1.1.7) и (1.1.8):

$$\alpha_\nu(x) = f_1(x)/f_2(x) = 1/x$$

$$\beta_\nu(x) = f_0(x)/f_2(x) = 1 - \nu^2/x^2$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } g_\nu(x) + \lambda_\nu &= \beta_\nu(x) - \frac{1}{4} (\alpha_\nu^2(x) + 2\alpha_\nu'(x)) \\ &= 1 - \nu^2/x^2 - (1/x^2 + 2(1/x)')/4 \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } g_\nu(x) + \lambda_\nu = 1 - \nu^2/x^2 + 1/4x^2 \quad (2.1.9)$$

$$\text{или } g_\nu(x) + \lambda_\nu = 1 - (\nu - 1/2)(\nu + 1/2)/x^2$$

Мы получили потенциал и собственное значение для уравнения Штурма-Лиувилля (2.1.5), к которому при помощи замены (2.1.6) мы свели уравнение Бесселя (2.1.4), используя теорему 1, доказанную в главе I.

Отношение (2.1.9) однозначно позволяет выделить ненулевое собственное значение λ_ν , равное -1 при всех значениях параметра $\forall \nu$, и потенциала:

$$g_\nu(x) = -(\nu - 1/2)(\nu + 1/2)/x^2, \quad \lambda_\nu = -1 \quad (2.1.10)$$

Мы свели уравнение Бесселя (2.1.4) к уравнению Штурма-Лиувилля с невырожденным собственным значением, позволяющим применить теорему 2. **Лемма доказана.**

Для функций существуют зависимости:

$$y_\nu(x) = x^{1/2} J_\nu(x) \quad \text{и} \quad J_\nu(x) = x^{-1/2} y_\nu(x) \quad (2.1.11)$$

и коэффициенты этих отношений простые (элементарные степенные функции).

Отметим, что в доказательстве при выделении ненулевого собственного значения уравнения мы не использовали значение параметра ν . Можно также заметить, что при параметрах ν и $-\nu$ уравнение Бесселя и Штурма-Лиувилля является неизменным. Поэтому для удобства мы считаем, что значение параметра ν в дальнейших изложениях всегда неотрицательно.

Полученное в лемме 1 уравнение (2.1.5) с невырожденными собственными значениями позволяет на основании теоремы 2 (Первой базовой теоремы) явно получить классические рекуррентные отношения для решений вспомогательного уравнения Штурма-Лиувилля (2.1.5) и классического уравнения Бесселя (2.1.4).

Теорема 3. Для классических уравнений Бесселя:

$$x^2 J_\nu''(x) + x J_\nu'(x) + (x^2 - \nu^2) J_\nu(x) = 0 \quad (2.1.4)$$

с неотрицательным параметром $\nu \geq 0$ и

ограниченными в нуле решениями $\lim_{x \rightarrow 0} |J_\nu(x)| < \infty$

существуют рекуррентные отношения вида:

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_\nu'(x) \quad (2.1.12)$$

$$J_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J_\nu'(x) \quad (2.1.13)$$

и эти отношения могут быть явно получены, исходя из общего вида классического уравнения Бесселя.

Доказательство. Применим теорему 2 к уравнению Штурма-Лиувилля, к которому было сведено классическое уравнение Бесселя в лемме 1:

$$y_\nu''(x) + g_\nu(x) y_\nu(x) = \lambda_\nu y_\nu(x) \quad (2.1.8)$$

где $g_\nu(x) = -(\nu - 1/2)(\nu + 1/2)/x^2$

$$\lambda_\nu = -1 \quad \text{для } \nu \geq 0 \quad (2.1.10)$$

Для получения рекуррентных отношений воспользуемся ослабленным условием теоремы 2:

$$A^2(x) + A'(x) = -g_\nu(x) + \mu \quad (1.2.4)$$

где μ — некоторая константа, которая может быть задана произвольно и которая не совпадает с собственным значением (2.1.10) базового уравнения Штурма-Лиувилля.

Мы получили следующее нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$A^2(x) + A'(x) = (\nu - 1/2)(\nu + 1/2)/x^2 + \mu$$

Если мы положим $\mu = 0$, то это уравнение явно достаточно легко решается в элементарных функциях:

$$A^2(x) + A'(x) = (\nu - 1/2)(\nu + 1/2)/x^2$$

Используем метод неопределенных коэффициентов.

Если $A(x) = \omega/x$, где ω — некоторая постоянная, то после подстановки мы получим выражение:

$$\omega^2/x^2 - \omega/x^2 = (\nu - 1/2)(\nu + 1/2)/x^2$$

$$\text{Отсюда: } \omega^2 - \omega + (1/4 - \nu^2) = 0$$

Очевидно, рассматриваемое дифференциальное уравнение первого порядка имеет два линейно-независимых решения, соответствующих паре ω :

$$A(x) = (1/2 + \nu)/x \quad (2.1.14)$$

$$A(x) = (1/2 - \nu)/x \quad (2.1.15)$$

Мы доказали существование некоторых рекуррентных отношений с невырожденными коэффициентами, имеющими особенность в нуле:

$$z(x) = A(x) y_\nu(x) - y_\nu'(x) \quad (1.2.2)$$

Отметим, что для получения рекуррентных отношений не потребовалось знать еще одно решение уравнения Штурма-Лиувилля, так как сразу получили значения для пары линейно-независимых рекуррентных отношений.

Теперь рассмотрим, какие потенциалы и собственные значения могут быть получены, исходя для данных отношений. Мы получили новое уравнение Штурма-Лиувилля:

$$z''(x) + q(x) z(x) = \lambda_\nu z(x) \quad (1.2.7)$$

$$\text{где } q(x) = g_\nu(x) + 2A'(x) \quad (1.2.8)$$

Если мы подставим полученные отношения (2.1.14) и (2.1.15) для $A(x)$ в отношение (1.2.8), мы получим пару потенциалов уравнения Штурма-Лиувилля:

$$q(x) = -(\nu + 1/2)(\nu + 3/2)/x^2 \quad (2.1.16)$$

$$q(x) = -(\nu - 1/2)(\nu - 3/2)/x^2 \quad (2.1.17)$$

Значение потенциала (2.1.16) полностью совпадает со значением потенциала уравнения Штурма-Лиувилля (2.1.8), соответствующего классическому уравнению Бесселя с параметром $(\nu + 1)$

$$g_{\nu+1}(x) = -(\nu + 1/2)(\nu + 3/2)/x^2 \quad (2.1.18)$$

Это выполняется для рекуррентного отношения:

$$z(x) = y_{\nu+1}(x) = A_\nu(x)y_\nu(x) - y_\nu'(x) \quad (2.1.19)$$

$$\text{где } A_\nu(x) = (\nu + 1/2)/x \quad (2.1.14)$$

Аналогично потенциал (2.1.17) совпадает с потенциалом, соответствующим параметру $(\nu - 1)$ для уравнения (2.1.8)

$$g_{\nu-1}(x) = -(\nu - 1/2)(\nu - 3/2)/x^2 \quad (2.1.20)$$

Это выполняется для рекуррентного отношения:

$$z^*(x) = y_{\nu-1}^*(x) = A_\nu^*(x)y_\nu(x) - y_\nu'(x) \quad (2.1.21)$$

$$\text{где } A_\nu^*(x) = -(\nu - 1/2)/x \quad (2.1.15)$$

Мы получили некоторую пару рекуррентных отношений (2.1.19) и (2.1.21). В силу однородности исходного и результирующего уравнений полученные с использованием рекуррентных отношений решения могут отличаться друг от друга на константу. Найдем ее для того, чтобы полученные уравнения строго соответствовали друг другу.

Перепишем отношение (2.1.21) для параметра $(\nu + 1)$

$$y_\nu^*(x) = A_{\nu-1}^*(x)y_{\nu+1}(x) - y_{\nu+1}'(x) \quad (2.1.22)$$

$$\text{где } A_{\nu-1}^*(x) = (-1/2 - \nu)/x \quad (2.1.23)$$

В силу однородности решений уравнения

$$y_\nu^*(x) = c y_\nu(x), \text{ где } c — \text{константа} \quad (2.1.24)$$

Подставив (2.1.24) в отношение (2.1.22), получим:

$$y_\nu^*(x) = c y_\nu(x) = A_{\nu-1}^*(x)y_{\nu+1}(x) - y_{\nu+1}'(x)$$

Используем выражение (2.1.19) и подставим его в полученное отношение для определения константы c :

$$c y_\nu(x) = A_{\nu-1}^*(x)(A_\nu(x)y_\nu(x) - y_\nu'(x)) - (A_\nu'(x)y_\nu(x) + A_\nu(x)y_\nu'(x) - y_\nu''(x))$$

В соответствии с уравнением Штурма-Лиувилля (2.1.8) и (2.1.9) подставим значение второй производной, упростим полученное выражение и получим тождества:

$$\left. \begin{array}{l} y_\nu(x) \\ y_\nu'(x) \end{array} \right| \begin{array}{l} c = A_{\nu-1}^*(x)A_\nu(x) - A_\nu'(x) - g_\nu(x) + \lambda_\nu \\ 0 = A_{\nu-1}^*(x) - A_\nu(x) \end{array} \quad \text{— это тождество}$$

$$\text{Упростив выражение, получаем } c = \lambda_\nu = -1 \quad (2.1.25)$$

$$\text{Таким образом, } y_\nu^*(x) = -y_\nu(x)$$

Мы получили пару рекуррентных отношений, удовлетворяющие уравнению Штурма-Лиувилля, к которому приводится классическое уравнение Бесселя, и эта пара рекуррентных отношений обеспечивает взаимно-однозначное соответствие решений уравнения (2.1.8)

$$y_{\nu+1}(x) = \frac{\nu + 1/2}{x} y_\nu(x) - y_\nu'(x) \quad (2.1.26)$$

$$y_{\nu-1}(x) = \frac{\nu - 1/2}{x} y_\nu(x) + y_\nu'(x) \quad (2.1.27)$$

Воспользовавшись результатами леммы 1 и подставив выражение (2.1.11), явно связывающее решения уравнения Штурма-Лиувилля и соответствующие им решения уравнения Бесселя, после упрощения выражений получим классические рекуррентные отношения, связывающие функции Бесселя (2.1.12) и (2.1.13) в теореме 3. **Теорема доказана.**

Известные рекуррентные отношения для функций Бесселя были получены естественным образом, исходя только из общего вида уравнения Бесселя.

Мы доказали существование цепочек рекуррентных отношений функций Бесселя, воспользовавшись методом рекуррентных отношений для решений уравнения Штурма-Лиувилля, соответствующего уравнению Бесселя с невырожденными собственными значениями, и Первой базовой теоремой (теоремой 2). Мы воспользовались ослабленными условиями и не искали второе частное линейно-независимое решение уравнения Штурма-Лиувилля с другими собственными значениями, не соответствующими функциям и уравнению Бесселя.

Доказательство теоремы 3 свелось к решению простого нелинейного дифференциального уравнения первого порядка, которое было получено в элементарных степенных функциях методом неопределенных коэффициентов.

$$x^2 J''_{\nu}(x) + x J'_{\nu}(x) + (x^2 - \nu^2) J_{\nu}(x) = 0 \quad (2.14)$$

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x} J_{\nu}(x) - J'_{\nu}(x) \quad (2.112)$$

$$J_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x} J_{\nu}(x) + J'_{\nu}(x) \quad (2.113)$$

Очевидно, что полученные рекуррентные отношения элементарно позволяют выписать еще одну пару рекуррентных отношений, связывающие три функции Бесселя, складывая и вычитая полученные выражения:

$$2J'_{\nu}(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) \quad (2.128)$$

$$J_{\nu-1}(x) - 2\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x) + J_{\nu+1}(x) = 0 \quad (2.129)$$

Параметр ν для уравнения и функций Бесселя принято называть индексом функций Бесселя.

§ 2. Функции Бесселя с полуцелым индексом

Функции Бесселя с полуцелым индексом (порядок которых равен целому числу с половиной) примечательны тем, что для них может быть выписано выражение через элементарные тригонометрические и степенные функции в явном виде, а не в форме асимптотических разложений. Доказательство этого приводилось Эйлером, исходя из общего вида разложений решений уравнения Бесселя и свойств гамма-функций Эйлера.

Используем новый подход. Рассмотрим частный случай параметра ν (индекса функций Бесселя), при которых

$$\nu = n + 1/2 \quad \text{при } n — \text{целые числа} \quad (2.21)$$

Воспользуемся полученными рекуррентными отношениями для поиска решений уравнений Бесселя с полуцелым индексом в явном виде. Для полуцелого индекса уравнение Бесселя и соответствующее ему уравнение Штурма-Лиувилля в соответствии с леммой 1 примет вид:

$$x^2 J''_{\nu}(x) + x J'_{\nu}(x) + (x^2 - \nu^2) J_{\nu}(x) = 0 \quad (2.22)$$

$$y''_n(x) - \frac{n(n+1)}{x^2} y_n(x) = -y_n(x) \quad (2.23)$$

$$y_n(x) = \sqrt{x} J_{\nu}(x) \quad \text{где } \nu = n + 1/2 \quad (2.24)$$

Рассматривая приведенное уравнение Штурма-Лиувилля (2.23), легко заметить, что при нулевом значении индекса n уравнение вырождается в элементарное:

$$y''_0(x) = -y_0(x) \quad \text{при } n=0 \text{ и } \nu = 1/2 \quad (2.25)$$

Сведение уравнения Бесселя к простому уравнению вида (2.25) при $n=0$ однозначно и явно позволяет сразу получить решение уравнения Штурма-Лиувилля и соответствующее ему уравнение Бесселя в виде пары линейно-независимых решений, выраженных через тригонометрические и степенные (элементарные) функции.

Общее решение (2.2.5) представлено в виде:

$$y_0(x) = \gamma_0 \sin x + \eta_0 \cos x \quad (2.2.6)$$

где γ_0 и η_0 — некоторые произвольные константы.

В соответствии с леммой 1 и (2.2.4) общее решение уравнения Бесселя с полуцелым индексом $\nu = 1/2$ может быть записано в виде:

$$J_{1/2}(x) = (\gamma_0 \sin x + \eta_0 \cos x) / \sqrt{x} \quad (2.2.7)$$

Проводя предварительные рассуждения в предыдущем параграфе, мы предполагали, что рассматриваемые функции Бесселя с произвольным индексом не имеют в нуле особенности и имеют ограниченное в нуле решение. Чтобы условие (2.1.3) выполнялось, мы должны потребовать:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |J_{1/2}(x)| < \infty \quad (2.2.8)$$

Только при условии $\eta_0 = 0$ мы получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} |J_{1/2}(x)| = \lim_{x \rightarrow 0} |\gamma_0 \sin x / \sqrt{x}| < \infty$$

Предельное значение функции в нуле составит

$$\lim_{x \rightarrow 0} (J_{1/2}(x)) = \gamma_0 \sqrt{x} = 0 \quad \text{при } \eta_0 = 0 \quad (2.2.9)$$

Таким образом, мы показали, что ограниченное в нуле решение уравнения Бесселя — функция Бесселя 1 рода для полуцелого индекса $\nu = 1/2$ представляется в явном виде через тригонометрические и степенные функции:

$$J_{1/2}(x) = (\gamma_0 \sin x) / \sqrt{x} \quad (2.2.10)$$

В теореме 3 было доказано, что для ограниченных в нуле функций Бесселя существуют рекуррентные отношения, связывающие эти функции, и эти рекуррентные отношения выражаются через элементарные (степенные) функции и первую производную.

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J'_\nu(x) \quad \text{где } \nu = n + 1/2 \quad (2.1.12)$$

$$J_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J'_\nu(x) \quad \text{где } \nu = n + 1/2 \quad (2.1.13)$$

Если функция Бесселя (2.2.10) с полуцелым индексом ограничена на числовой оси и выражается через элементарные функции (степенные и тригонометрические), то и первая производная функции Бесселя существует и также выражается через элементарные функции.

На основании полученных результатов выразим функцию Бесселя с полуцелым индексом в явном виде. Для этого рассмотрим оператор, обратный оператору рекуррентной замены (2.1.12). В теореме 3 мы доказали существование и единственность рекуррентной формы (2.1.12) с точностью до некоторой константы (в силу однородности решений рассматриваемых уравнений).

Лемма 2. Для рекуррентного отношения

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J'_\nu(x) \quad \text{где } \nu = n + 1/2 \quad (2.1.12)$$

существует невырожденный обратный оператор

$$J_\nu(x) = - \int \frac{x^\nu}{\xi^\nu} J_{\nu+1}(\xi) d\xi \quad (2.2.11)$$

Доказательство. Для доказательства настоящей леммы введем формальный линейный оператор для правой части рекуррентного отношения (2.1.12):

$$L_\nu(f(x)) = \left(\frac{\nu}{x} - \frac{d}{dx} \right) f(x) \quad (2.2.12)$$

Представим рекуррентное отношение (2.1.12) в форме формального линейного оператора:

$$J_{\nu+1}(x) = L_\nu(J_\nu(x)) \quad (2.2.13)$$

Преобразуем формальный оператор, положив

$$A_\nu(x) = \frac{\Phi'_\nu(x)}{\Phi_\nu(x)} \quad \text{где } \Phi_\nu(x) \text{ — функция} \quad (2.2.14)$$

и где $L_\nu = (A_\nu(x) - \frac{d}{dx})$ — оператор

Очевидно, что $A_\nu(x) = \frac{\Phi_\nu'(x)}{\Phi_\nu(x)} = \frac{\nu}{x}$ (2.2.15)

Мы получили линейное дифференциальное уравнение первого порядка (2.2.15), решением которого является элементарная степенная функция:

$$\Phi_\nu(x) = x^\nu \text{ при всех значениях параметра} \quad (2.2.16)$$

С учетом полученного выражения рекуррентное отношение (2.1.12) можно записать в форме:

$$\begin{aligned} J_{\nu+1}(x) &= \frac{\Phi_\nu'(x)}{\Phi_\nu(x)} J_\nu(x) - J_\nu'(x) = \\ &= \frac{\Phi_\nu'(x) J_\nu(x) - \Phi_\nu(x) J_\nu'(x)}{\Phi_\nu(x)} \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } J_{\nu+1}(x) = -\Phi_\nu(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{J_\nu(x)}{\Phi_\nu(x)} \right) \quad (2.2.17)$$

С учетом полученного выражения рекуррентное отношение (2.1.17) можно записать в формальной форме:

$$\frac{J_{\nu+1}(x)}{\Phi_\nu(x)} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{J_\nu(x)}{\Phi_\nu(x)} \right) \quad (2.2.18)$$

Для получения формального решения формально проинтегрируем обе части полученного уравнения (2.2.18), соответствующего рекуррентному отношению (2.2.12):

$$\int \frac{J_{\nu+1}(\xi)}{\Phi_\nu(\xi)} d\xi = -\frac{J_\nu(x)}{\Phi_\nu(x)} \quad (2.2.19)$$

$$\text{Отсюда } J_\nu(x) = -\int \frac{\Phi_\nu(x) J_{\nu+1}(\xi)}{\Phi_\nu(\xi)} d\xi \quad (2.2.20)$$

Подставив в выражение (2.2.20) полученное ранее значение функции $\Phi_\nu(x)$ на основании (2.2.16), мы формально получим обратный оператор (2.2.11) к оператору рекуррентных отношений для функций Бесселя (2.1.12).

Для корректного доказательства существования невырожденного обратного оператора (2.2.11) требуется отдельно доказать существование правого и левого обратного оператора и их тождественность. Чтобы доказать существование правого обратного оператора, подставим найденный ранее формальный обратный оператор (2.2.11) в рекуррентное отношение (2.1.12):

$$\begin{aligned} J_{\nu+1}(x) &= \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_\nu'(x) = \\ &= -\frac{\nu}{x} \int \frac{x^\nu}{\xi^\nu} J_{\nu+1}(\xi) d\xi + \frac{d}{dx} \int \frac{x^\nu}{\xi^\nu} J_{\nu+1}(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Очевидно, что после дифференцирования по частям выражения (2.2.21) отношение становится тождественным. Это доказывает существование и корректность правого обратного оператора.

Существование и корректность левого обратного оператора проверяется аналогичным образом — путем подстановки рекуррентного отношения для решений уравнений Бесселя (2.1.12) в формальный обратный оператор (2.2.20) с учетом представления (2.2.14):

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= -\int \frac{x^\nu}{\xi^\nu} J_{\nu+1}(\xi) d\xi = \\ &= -\int \frac{\Phi_\nu(x)}{\Phi_\nu(\xi)} \left(\frac{\Phi_\nu'(\xi)}{\Phi_\nu(\xi)} J_\nu(\xi) - J_\nu'(\xi) \right) d\xi c \end{aligned}$$

где $\Phi_\nu(x) = x^\nu$ — полученная по (2.2.16) функция.

Для того, чтобы корректно доказать существование правого обратного оператора, используется общее представление прямого и обратного операторов через $\Phi_\nu(x)$.

Заметим, что без использования обобщенного отношения и введенных функций (2.2.14) доказательство существования правого обратного оператора было бы менее очевидно. Используем формальный метод интегрирования по частям для интеграла, формально представленного в правой части отношения (2.2.22):

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \int_0^x \varphi_\nu(x) J_\nu(\xi) d \frac{1}{\varphi_\nu(\xi)} + \int_0^x \frac{\varphi_\nu(x)}{\varphi_\nu(\xi)} d J_\nu(\xi) = \\ &= \varphi_\nu(x) \frac{J_\nu(\xi)}{\varphi_\nu(\xi)} \Big|_{\xi=0}^{x=\xi} - \int_0^x \frac{\varphi_\nu(x)}{\varphi_\nu(\xi)} d J_\nu(\xi) + \\ &+ \int_0^x \frac{\varphi_\nu(x)}{\varphi_\nu(\xi)} d J_\nu(\xi) = J_\nu(x) \quad \text{— тождество} \end{aligned}$$

Единственность правого обратного оператора обеспечивается выбранным и доказанным ранее условием (2.2.9) равенства нулю функции Бесселя в нуле.

Доказав тождественность, невырожденность и существование правого и левого обратного оператора, мы доказали корректность и существование обратного оператора (2.2.11) для рекуррентных отношений для ограниченных в нуле решений функции Бесселя. *Лемма доказана.*

Пользуясь леммой 2 о существовании оператора, обратного рекуррентным отношениям, можно получить общую формулу функций Бесселя 1 рода с полуцелым индексом, ограниченных в нуле.

Теорема 4. *Ограниченные в нуле функции Бесселя с полуцелым индексом могут быть получены через элементарные функции (степенные и тригонометрические), используя отношение вида:*

$$J_{n+1/2}(x) = (-1)^n x^{n+1/2} \left(\frac{d}{x dx} \right)^n \frac{\sin x}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (2.2.23)$$

где n — целые неотрицательные числа.

Доказательство. Для доказательства будем последовательно применять к функциям Бесселя с полуцелым индексом обратные операторы (2.2.11), полученные в лемме 2, а также метод математической индукции. Мы получили

$$J_{1/2}(x) = \sin \sqrt{x} \quad \text{с точностью до константы } \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$J_\nu(x) = - \int_0^x \frac{x^\nu}{\xi^\nu} J_{\nu+1}(\xi) d\xi \quad \text{где } \nu = n + 1/2 \quad (2.2.11)$$

Запишем обратный оператор функции Бесселя:

$$J_{1/2}(x) = \sin x \sqrt{x} = \frac{\sin x}{x^{1/2}}$$

$$J_{1/2}(x) = - \int_0^x \frac{x^{1/2}}{\xi^{1/2}} J_{3/2}(\xi_1) d\xi_1 = \frac{\sin x}{x^{1/2}}$$

Отсюда мы получаем отношение:

$$\frac{\sin x}{x} = - \int_0^x \frac{1}{\xi^{1/2}} J_{3/2}(\xi_1) d\xi_1$$

Ранее мы доказали, что ограниченные в нуле функции Бесселя с полуцелым индексом могут быть представлены конечным набором элементарных функций — степенных и тригонометрических, поэтому все рассматриваемые в теореме интегралы существуют и все проводимые над ними операции корректны. Далее будем последовательно подставлять в полученное уравнение обратные операторы для каждых следующих функций Бесселя.

$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^x \int_0^{\xi_1} \dots \int_0^{\xi_{n-1}} (-1)^n \frac{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}{\xi_n^{n+1/2}} J_{n+1/2}(\xi_n) d\xi_n \dots d\xi_1 \quad (2.2.24)$$

$$\text{Введем оператор } \mathcal{D} = \frac{d}{x dx} \quad (2.2.25)$$

К полученному отношению (2.2.24) будем последовательно применять введенный формальный оператор (2.2.25) и последовательно формально интегрировать это отношение

$$\frac{d}{x dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \int \int \dots \int_{\xi_n}^{x \xi_2 \xi_{n-1}} (-1)^n \frac{\xi_2 \dots \xi_{n-1}}{\xi_n^{n+1/2}} J_{n+1/2}(\xi_n) d\xi_n \dots d\xi_2$$

$$\frac{d}{x dx} \dots \frac{d}{x dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = (-1)^n \frac{J_{n+1/2}(x)}{x^{n+1/2}}$$

Продолжаем формальное интегрирование правых и левых частей тождества (2.2.24) оператором (2.2.25) до тех пор, пока мы не избавимся от всех интегральных представлений и получим функцию Бесселя с полуцелым индексом в явном виде (2.2.23). *Теорема доказана.*

Примечание. В случае функций Бесселя с полуцелым индексом мы использовали то, что все необходимые производные и интегралы существуют и справедливо

$$\frac{d}{dx} \int_x^{\xi} f(\xi) d\xi = f(\xi) + c \quad (c=0) \quad (2.2.26)$$

Произведем расчет некоторых функций Бесселя:

$$\begin{aligned} J_{3/2}(x) &= (-1) x^{3/2} \left(\frac{d}{x dx} \right) \frac{\sin x}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \\ &= (-1) x^{1/2} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ J_{3/2}(x) &= \sqrt{\frac{1}{x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (2.2.27) \end{aligned}$$

С точностью до константы получено классическое выражение для функции Бесселя 1 рода (ограниченное в нуле невырожденное решение уравнения Бесселя) с полуцелым индексом 3/2 с использованием явно доказанной теоремы 4 и отношения (2.2.23).

§ 3. Асимптотическое поведение и явное выражение через степенные и тригонометрические ряды функций Бесселя с полуцелым индексом

Для функций Бесселя 1 рода (ограниченных в нуле) с полуцелыми индексами отдельный интерес представляет изучение формального дифференциального оператора $\mathcal{D}$ (2.2.25), возведенного в целую степень. Оператор позволяет получить формулы асимптотического поведения рассматриваемых функций Бесселя вдали от начала координат, при очень больших значениях переменной, и явно выписать конечные ряды функций Бесселя с полуцелым индексом через степенные и тригонометрические функции.

Получим символический вид формального дифференциального оператора $\mathcal{D}$ натуральной степени:

Утверждение 1. Формальный оператор

$$\mathcal{D} f(x) = \left(\frac{d}{x dx} \right) f(x) \quad (2.2.25)$$

имеет общее формальное представление:

$$\mathcal{D}^n = \left(\frac{d}{x dx} \right)^n = \sum_{k=1}^n \frac{\Psi_k^{(n)}}{x^{2n-k}} \frac{d^k}{dx^k} \quad (2.3.1)$$

где $\Psi_k^{(n)}$ — некоторые числовые константы.

Доказательство. Для доказательства заметим, что при нулевой степени оператор формально вырождается в тождественную единицу. При первой степени значение оператора (2.3.1) полностью совпадает с его представлением с единичным числовым коэффициентом.

Будем использовать метод математической индукции, полагая, что для всех предыдущих натуральных степеней формального дифференциального оператора $\mathcal{D}$ выражение (2.3.1) тождественно выполняется.

Выпишем выражение (2.3.1) для степени $(n-1)$.

$$\mathcal{D}^{n-1} = \left(\frac{d}{x dx} \right)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Psi_k^{(n-1)}}{x^{2(n-1)-k}} \frac{d^k}{dx^k}$$

Применим к выражению формальный оператор:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^n = & \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)(2(n-1)-k)}{x^{2(n-1)-k+2}} \Psi_k^{(n-1)} \frac{d^k}{dx^k} + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Psi_k^{(n-1)}}{x^{2(n-1)-k+1}} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

$$\mathcal{D}^n = \dots + \sum_{k=2}^n \frac{\Psi_{k-1}^{(n-1)}}{x^{2(n-1)-k+2}} \frac{d^k}{dx^k}$$

Для тождественного выполнения и существования оператора приравняем в полученном (2.3.2) и исходном выражении (2.3.1) коэффициенты при равных степенях и производных, получив рекуррентные зависимости:

$$\begin{aligned} k=n & \left| \frac{1}{x^n} \frac{d^n}{dx^n} \right| \Psi_n^{(n)} = \Psi_{n-1}^{(n-1)} \\ k=1 & \left| \frac{1}{x^{2n-1}} \frac{d}{dx} \right| \Psi_1^{(n)} = (-1)(2n-3) \Psi_1^{(n-1)} \\ k & \left| \frac{1}{x^{2n-k}} \frac{d^k}{dx^k} \right| \Psi_k^{(n)} = \Psi_{k-1}^{(n-1)} + \\ & + (-1)(2(n-1)-k) \Psi_k^{(n-1)} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Полученные рекуррентные отношения для коэффициентов оператора позволяют получить значения параметров формального дифференциального оператора. Значения этих констант на основании (2.3.3) могут быть получены явно или в форме рекуррентных отношений:

$$\begin{cases} \Psi_n^{(n)} = 1 \text{ при всех значениях параметра} \\ \Psi_1^{(n)} = (-1)^{n-1} (2n-3)!! \\ \Psi_k^{(n)} = \Psi_{k-1}^{(n-1)} + (-1)(2(n-1)-k) \Psi_k^{(n-1)} \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Невырожденность оператора доказывает существованием приведенных явных и рекуррентных отношений (2.3.4) и их невырожденность. *Утверждение доказано.*

Утверждение 1 показывает, что формальный дифференциальный оператор (2.3.1), примененный к некоторой функции, которая представлена в элементарных дифференцируемых функциях, позволяет получить конечный ряд, члены которого представлены элементарными функциями.

Оператор (2.3.1) позволяет явно изучить асимптотическое поведение функций Бесселя с полуцелым индексом на основании результатов (2.2.23), полученных в теореме 4.

Применим формальный дифференциальный оператор к результирующему выражению теоремы 4, исходя из

$$\frac{d^k}{dx^k} \frac{\sin x}{x} = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i i! i! (k-i)!}{k! x^{i+1}} \frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}} \sin x$$

Заметим, что полученные в этом выражении производные тригонометрических функций — это также тригонометрические функции. Используя (2.2.23)

$$J_{n+1/2}(x) = (-1)^n x^{n+1/2} \mathcal{D}^n \frac{\sin x}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (2.3.5)$$

Запишем явное выражение для функций Бесселя:

$$J_{n+1/2}(x) = (-1)^n \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^k \frac{\Theta_{k,i}^{(n)}}{x^{1/2+n+i-k}} \frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}} \sin x \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\text{где } \Theta_{k,i}^{(n)} = \Psi_k^{(n)} \frac{(-1)^i i! i! (k-i)!}{k!} \quad (2.3.6)$$

Из отношения (2.3.6) можно предположить, что рассматриваемая функция Бесселя на бесконечности стремится к нулю. Для того, чтобы найти асимптотическое поведение функций Бесселя с полуцелым индексом, нужно отыскать коэффициент разложения, который медленнее других убывает на бесконечности, а другими (быстрее убывающими) членами ряда можно пренебречь.

Степень входящих в ряд его членов выражается через параметры (k, i) соответственно $-(1/2 + n + i - k)$, поэтому на бесконечности ряд (2.3.6) убывает. При значениях $k = n$ и $i = 0$ требуемая степень переменной составит $-1/2$.

Поэтому асимптотическое разложение функций Бесселя с полуцелым индексом можно записать в виде:

$$J_{n+1/2}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(-1)^n}{x^{1/2}} \frac{d^n}{dx^n} \sin x \quad (2.3.7)$$

Формула (2.3.7) позволяет заключить, что вдали от начала координат при стремлении переменной к бесконечности функции Бесселя близки к тригонометрическим функциям $\sin x$ и $\cos x$, так как их изменение в зависимости от значения переменной носит колебательный характер.

Асимптотический период колебаний функций Бесселя стремиться к классическому 2π . Однако амплитуда их колебаний постепенно угасает и стремится к нулю.

Колебания функций Бесселя находятся в своеобразном коридоре, который при больших значениях переменной постепенно сужается и сходится к нулю. На бесконечности рассматриваемые функции Бесселя вырождаются в ноль.

В силу особенностей такого асимптотического поведения рассматриваемые функции Бесселя идеальны для описания любых затухающих процессов и физических процессов, сопровождающихся постоянной потерей внутренней энергии системы (например, потери на охлаждение, сопротивление, трение и другие).

Функции Бесселя обеспечивают очень быструю корректную сходимость решений физических задач, описывающих многие реальные процессы математической физики, без внешней поддержки постепенно затухающие на бесконечности (или достаточно далеко от нуля).

§ 4. Функции Бесселя с полуцелым индексом, неограниченные в нуле

В предыдущих разделах мы рассматривали одно из решений уравнения Штурма-Лиувилля — функции Бесселя с полуцелым индексом, ограниченные в нуле.

Однако в ходе рассуждений было выявлено существование еще одного линейно-независимого решения, имеющего неограниченное значение в окрестностях нуля. Рассмотрим второй частных случай, при котором параметр (индекс функций Бесселя) принимает отрицательное значение.

$$x^2 J''_{-\nu}(x) + x J'_{-\nu}(x) + (x^2 - \nu^2) J_{-\nu}(x) = 0 \quad (2.4.1)$$

Очевидно, что функции Бесселя положительного ν и отрицательного $-\nu$ параметров с полуцелым индексом одновременно удовлетворяют уравнению Бесселя (2.1.1), являются двумя частными линейно-независимыми решениями этого уравнения и позволяют получить общее решение линейного однородного уравнения Бесселя:

$$z(x) = c_1 J_{\nu}(x) + c_2 J_{-\nu}(x) \quad \text{где } \nu \geq 0 \quad (2.4.2)$$

Ранее мы рассматривали положительное значение параметра в приведенном уравнении Штурма-Лиувилля (2.1.5), однако оно имеет смысл и при отрицательном значении параметра. При нулевом значении индекса рассматриваемых функций Бесселя оно также вырождается в элементарное:

$$y_0''(x) = -y_0(x) \quad \text{при } n=0 \text{ и } \nu = -1/2 \quad (2.4.3)$$

$$-\nu = -n - 1/2 \quad \text{при } n \text{ — целые числа} \quad (2.4.4)$$

В соответствии с (2.2.6), второе линейно-независимое решение уравнения Бесселя, которое мы не рассмотрели ранее, может быть записано в форме:

$$y_0(x) = \eta_0 \cos x \quad (2.4.5)$$

$$J_{-1/2}(x) = (\eta_0 \cos x) / \sqrt{x} \quad (2.4.6)$$

Для доказательства теоремы 3 мы нигде не использовали ограниченность в нуле функций Бесселя. Можно распространить ее результаты на общий случай и воспользоваться полученными результатами для нахождения рекуррентных соотношений при отрицательных значениях параметра, так как была показана невырожденность и аналитичность этих функций.

$$J_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x} J_{\nu}(x) + J'_{\nu}(x) \quad (2.1.13)$$

Подставим в соотношение отрицательный параметр:

$$J_{-\nu-1}(x) = \frac{-\nu}{x} J_{-\nu}(x) + J'_{-\nu}(x) \quad \text{где } \nu \geq 0$$

или $J_{-\nu-1}(x) = (-1) \left(\frac{\nu}{x} J_{-\nu}(x) - J'_{-\nu}(x) \right) \quad (2.4.7)$

Заметим, что рекуррентное соотношение для неограниченных в нуле частных решений уравнения Бесселя совпадает с точностью до константы с рекуррентным соотношением для ограниченных в нуле частных решений уравнения Бесселя (2.1.12).

Воспользуемся ходом доказательства леммы 2, мы совершенно аналогичными рассуждениями (с точностью до константы) получим доказательство леммы 3 для соотношения (2.4.7) и обратный оператор для рекуррентной замены с отрицательными параметрами.

Лемма 3. Для рекуррентного соотношения

$$J_{-\nu-1}(x) = (-1) \left(\frac{\nu}{x} J_{-\nu}(x) - J'_{-\nu}(x) \right) \quad \text{где } \nu \geq 0 \quad (2.4.8)$$

существует невырожденный обратный оператор

$$J_{-\nu}(x) = \int_{\xi}^x \frac{x^{\nu}}{\xi^{\nu}} J_{-\nu-1}(\xi) d\xi \quad (2.4.9)$$

Невырожденный обратный оператор позволяет в явном виде получить выражение в элементарных функциях (конечный ряд степенных и тригонометрических функций) для функций Бесселя с полуцелым отрицательным индексом, не ограниченных в нуле.

Теорема 5. Неограниченные в нуле функции Бесселя с полуцелым индексом могут быть получены через элементарные функции (степенные и тригонометрические), используя отношение вида:

$$J_{-n-1/2}(x) = x^{n+1/2} \left(\frac{d}{x dx} \right)^n \frac{\cos x}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (2.4.10)$$

где n — целые неотрицательные числа.

Примечание. В том случае, когда одно и то же рекуррентное соотношение рассматривается для двух частных линейно-независимых решений уравнения Бесселя, уравнения могут отличаться от приведенных с точностью до константы. В приводимых рассуждениях мы разделили ограниченные и неограниченные в нуле частные решения уравнения Бесселя и рассмотрели их отдельно.

Запишем явное выражение для функций Бесселя:

$$J_{-n-1/2}(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^k \frac{\Theta_{k,i}^{(n)}}{x^{1/2+n+i-k}} \frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}} \cos x \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

где $\Theta_{k,i}^{(n)} = \Psi_k^{(n)} \frac{(-1)^i i! i! (k-i)!}{k!} \quad (2.4.11)$

На основании полученного явного вида решения уравнения Бесселя с отрицательным полуцелым индексом, опишем его асимптотическое поведение при неограниченном возрастании переменной:

$$J_{-n-1/2}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^{1/2}} \frac{d^n}{dx^n} \cos x \quad (2.4.12)$$

Отсюда следует, что асимптотическое поведение неограниченной в нуле функции Бесселя с отрицательным полуцелым индексом полностью совпадает с асимптотическим поведением второго частного линейно-независимого решения — ограниченной в нуле функции Бесселя с положительным индексом.

Функции Бесселя вдали от нуля близки к тригонометрическим функциям, но их значения при стремлении переменной к бесконечности постепенно затухают (стремятся к нулю). Поэтому общее решение уравнения Бесселя на бесконечности ограничено и является постепенно затухающей на функцией, стремящейся к нулю.

Благодаря такому поведению функции Бесселя иногда рассматриваются как пополнение и расширение класса тригонометрических колебательных функций в прикладных задачах математической физики. Разложение по функциям Бесселя и их прямое применение на сегодня является одним из наиболее перспективных направлений при решении реальных физических задач и построения достоверных математических моделей физических процессов.

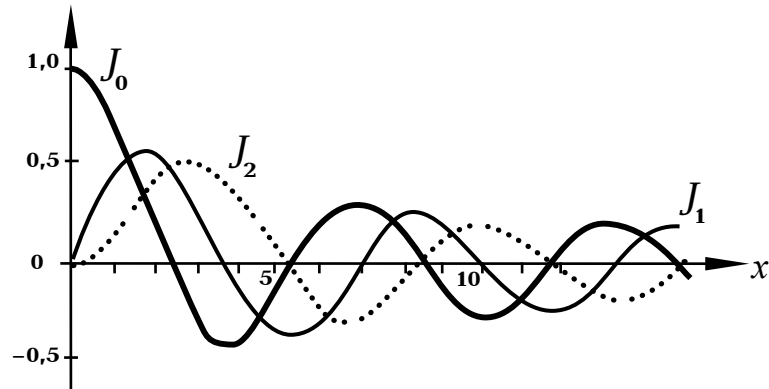


Рис. 1. Ограниченные в нуле функции Бесселя

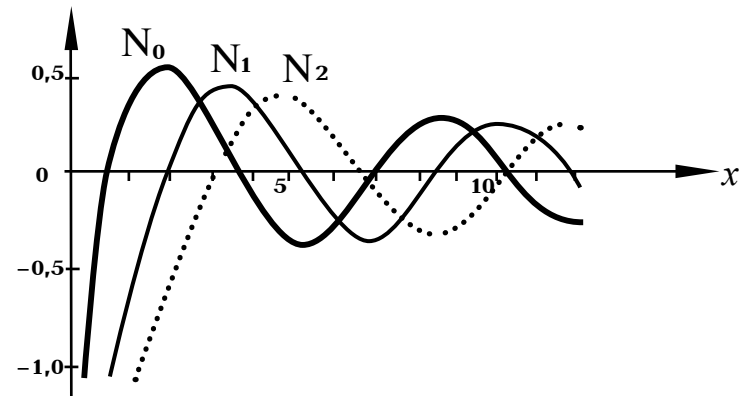


Рис. 2. Неограниченные в нуле функции Неймана

§ 5. Разложение в степенные ряды функций Бесселя с произвольным индексом

В уравнении (2.1.5), к которому приводится уравнение Бесселя, все входящие в него производные и степени переменной четные, поэтому для функций Бесселя с учетом замены (2.1.6) используются четные степени разложения.

$$x^2 z''(x) + x z'(x) + (x^2 - \nu^2) z(x) = 0 \quad (2.1.1)$$

Будем искать решение классического уравнения Бесселя (2.1.1) путем разложения в степенной ряд методом неопределенных коэффициентов, полагая, что это разложение существует и полученный ряд сходится.

$$z(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{p+2k} \quad (2.5.1)$$

Подставим разложение (2.5.1) в уравнение (2.1.1):

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} (p+2k)(p+2k-1) a_k x^{p+2k} + \\ + (p+2k) a_k x^{p+2k} - \nu^2 a_k x^{p+2k} + a_k x^{p+2k+2}$$

Для обеспечения тождественного равенства при всех значениях переменной приравняем коэффициенты для каждой из степени переменной:

$$\begin{array}{l|l} k=0 & (p+2k)(p+2k-1) + (p+2k) - \nu^2 = 0 \\ k & ((p+2k)(p+2k-1) + (p+2k) - \nu^2) a_k + \\ & + a_{k-1} = 0 \end{array}$$

После упрощения получаем отношения:

$$p^2 = \nu^2 \quad \text{и} \quad p = \mp \nu \quad \text{при} \quad \nu \geq 0 \quad (2.5.2)$$

$$4k(\mp \nu + k) a_k + a_{k-1} = 0 \quad \text{и} \quad a_0 \text{ произвольно}$$

Отсюда получаем выражение:

$$a_k = (-1) \frac{a_{k-1}}{4k(\mp \nu + k)} = \dots$$

$$a_k = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} k! (\mp \nu + k) \dots (\mp \nu + 1)} \quad (2.5.3)$$

Более детально изучим выражение:

$$\gamma(k, \nu) = (\mp \nu + k) \dots (\mp \nu + 1) \quad (2.5.4)$$

При целых положительных значениях параметра $\mp \nu$ (частный случай) выражение примет привычный вид:

$$\gamma(k, n) = (n + k) \dots (n + 1) = (n + k)! / n!$$

Для получения компактного вида выражения (2.5.4) с натуральными параметрами используется понятие функционала. Для остальных чисел (в том числе нецелых) Эйлером было введено понятие обобщенного функционала — гамма-функции или интеграла Эйлера, имеющий свойства:

$$\Gamma(u + 1) = u \Gamma(u) \quad \text{где } u \text{ — числа} \quad (1.3.3)$$

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad \text{и} \quad \Gamma(1) = 1 \quad (1.3.4)$$

Это позволяет компактно записать:

$$\gamma(k, \nu) = \Gamma(\mp \nu + k + 1) / \Gamma(\mp \nu + 1) \quad (2.5.5)$$

$$\frac{a_k}{a_0} = (-1)^k \frac{\Gamma(\mp \nu + 1)}{2^{2k} k! \Gamma(\mp \nu + k + 1)} \quad (2.5.6)$$

Из соображений удобства чаще всего используют следующие принятые значения:

$$a_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\mp \nu + 1)} \quad \text{при } k = 0$$

$$a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \Gamma(\mp \nu + k + 1)} \quad (2.5.6)$$

Общий вид нулевого параметра выбран так, что при нулевом значении отношение (2.5.6) тоже выполняется.

Мы получили классическое разложение в ряд функций Бесселя с использованием гамма-функций Эйлера:

$$z_{\mp \nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\mp \nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k! \Gamma(\mp \nu + k + 1)} \quad (2.5.7)$$

Исследуем полученный ряд подробнее. Рассмотрим случай целых индексов. При положительных целых значениях индекса гамма-функция является функционалом.

При отрицательных целых значениях индекса гамма-функция вырождается в бесконечность, поэтому полученное разложение в ряд (2.5.7) не имеет смысла.

Утверждение 2. При целых значениях индекса решение уравнения Бесселя единственное (с точностью до константы) и может быть получено разложением в ряд

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k! (n + k)!} \quad \text{при } n \geq 0 \quad (2.5.8)$$

Доказательство. Для строгого доказательства воспользуемся полученными ранее рекуррентными отношениями функций Бесселя. Перепишем первое отношение (2.1.12) для функций с целым положительным индексом:

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J'_n(x) \quad \text{при } n \geq 0$$

Второе рекуррентное отношение (2.1.13) запишем для функций с целым отрицательным индексом:

$$J_{-n-1}(x) = \frac{-n}{x} J_{-n}(x) + J'_{-n}(x) \quad \text{при } n \geq 0$$

Подставив в оба этих рекуррентных отношения нулевое значение индекса, получим требуемое тождество:

$$J_1(x) = -J'_0(x) \quad \text{и} \quad J_{-1}(x) = J'_0(x)$$

Отсюда $J_1(x) = -J_{-1}(x)$ и эти два решения выявились линейно-зависимыми. **Утверждение доказано.**

Утверждение 3. При нецелых значениях индекса существуют два частных линейно-независимых решения уравнения Бесселя (с точностью до константы), которые могут быть получены разложением в ряд

$$J_{\mp\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\mp\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k! \Gamma(\mp\nu + k + 1)} \quad \nu \geq 0 \quad (2.5.9)$$

Доказательство. Для доказательства этого утверждения воспользуемся полученными ранее рекуррентными соотношениями. Представим индекс в виде

$\nu = n + \varepsilon$ где $0 < \varepsilon < 1$ и n целое неотрицательное.

Наименьшее значение положительного индекса ε

$$J_{\varepsilon+1}(x) = \frac{\varepsilon}{x} J_{\varepsilon}(x) - J'_{\varepsilon}(x) \quad \text{где } 0 < \varepsilon < 1$$

$$J_{\varepsilon-1}(x) = \frac{\varepsilon}{x} J_{\varepsilon}(x) + J'_{\varepsilon}(x)$$

Сомнительный случай полуцелых индексов исследован ранее. Для полуцелых индексов существуют два линейно-независимых решения уравнения Бесселя, которые связаны с линейной независимостью двух тригонометрических функций — линейно-независимых решения начального уравнения Штурма-Лиувилля.

Линейная независимость двух различных решений для других нецелых индексов следует из приведенных рекуррентных соотношений, и полученного разложения в ряд.

$$\Gamma(\nu + k + 1) = (k + 1 + \nu) \dots (k + 1 - \nu) \Gamma(-\nu + k + 1)$$

При нецелых значениях параметра существует два линейно-независимых решения уравнения Бесселя. При отрицательных нецелых значениях индекса функции Бесселя, полученные методом разложения в ряд, имеют в нуле особенность и стремятся к бесконечности. При положительных нецелых значениях индекса функции Бесселя равны нулю, ограниченная функция с нулевым индексом имеет предельное значение в нуле, равное единице.

Функция Бесселя является аналитической при всех значениях переменной, исключая возможно ноль.

Сходимость полученного ряда (2.5.9) обеспечивается признаком Вейерштрасса в любой замкнутой области при любом ограниченном значении нецелого индекса, так как при всех значениях k все члены этого ряда ограничены некоторой константой.

При целых отрицательных значениях индекса решение уравнения единственно и совпадает с положительным.

При неотрицательных индексах максимальное значение модуля числовых коэффициентов ряда достигается при $k=0$ и $\nu=0$ и равно 1.

$$\frac{2^{2k}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} > \frac{2^{2(k+1)}}{(k+1)! \Gamma(\nu + k + 2)}$$

$$a_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu} \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \quad \text{ограничено при } \nu \geq 0$$

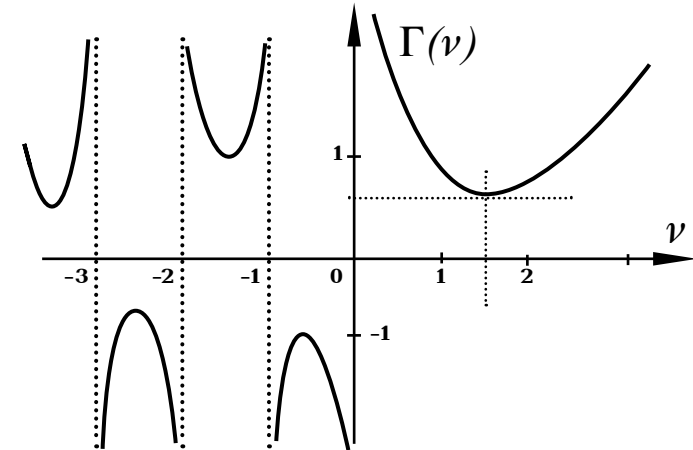


Рис. 3. Гамма-функция Эйлера

При всех других допустимых значениях числовые коэффициенты ряда меньше нулевого и с ростом значений k на бесконечности стремятся к нулю. Поэтому ряды (2.5.9) для функций Бесселя с неотрицательным индексом не представляют затруднений.

Быстрое стремление к нулю коэффициентов разложения ряда (2.5.9) для функций Бесселя с неотрицательными индексами позволяет использовать ограниченное количество членов ряда для незначительно удаленных от нуля решений, где ряд (2.5.9) достаточно быстро сходится. С ростом индекса функций Бесселя стремление к нулю его коэффициентов также возрастает.

Для функций Бесселя с нецелым отрицательным индексом в близкой окрестности целых отрицательных значений индекса значения соответствующих гамма-функций в первых числовых коэффициентах ряда (2.5.9) неограниченно возрастают и $\mathcal{V}$ начальных числовых коэффициентов ряда будут малы. Причем чем больше значение индекса $\mathcal{V}$, тем больше начальных коэффициентов ряда будут мало.

$$\lim_{\nu \rightarrow n} |\Gamma(-\nu)| = \infty \quad \text{для } \nu \geq 0 \text{ и } n \text{ натуральные.}$$

Поэтому недалеко от нуля для функций Бесселя с отрицательным индексом, близким к целому, при использовании численных методов и приближенных вычислений на компьютере начальными членами разложения можно пренебрегать. Существенными для приближенных вычислений могут оказаться члены ряда с номерами, близкими к $\mathcal{V}$. Игнорирование этого иногда может повлечь несходимость или некорректность не модифицированного алгоритма.

При любом ограниченном отрицательном нецелом значении индекса за счет невырожденности гамма-функций Эйлера ряд (2.5.9) также будет сходиться. Проблемы численных приближенных вычислений разложения ряда могут возникнуть вблизи экстремумов гамма-функций отрицательного параметра, которые с ростом $\mathcal{V}$ достаточно быстро стремятся к нулю, достигая его на бесконечности.

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |\text{ext } \Gamma(-\nu)| = 0 \quad \text{для } \nu \geq 0$$

Однако из общей теории гамма-функций Эйлера известно, что они достигают экстремума вблизи полуцелых значений параметра. Разложение для них получено явно.

Разложение в ряд (2.5.9) практически не используется при значительно удаленных от нуля значениях переменных, где функции Бесселя выявляют четкое асимптотическое поведение, которое нельзя получить явно исходя из общего вида полученного разложения. *Утверждение доказано.*

Рассмотрим более подробно поведение полученных разложений в ряд (2.5.9) для функций Бесселя при условии, что значение индекса отрицательный и стремится к целому числу (функции Бесселя целого отрицательного индекса):

$$J_{-n}(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k! \Gamma(-\nu + k + 1)} \quad \nu \geq 0$$

Гамма-функции Эйлера имеют неустраняемые особенности и стремятся к бесконечности при стремлении параметра к целому отрицательному числу и нулю. Поэтому при любых ограниченных значениях переменной (не рассматривая асимптотическое поведение ряда на бесконечности) первые $(n-1)$ членов этого ряда стремятся к нулю:

$$\lim_{\nu \rightarrow n} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k! \Gamma(-\nu + k + 1)} = 0$$

Поэтому предельный переход даст такой результат:

$$J_{-n}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k! \Gamma(-n + k + 1)}$$

Произведя замену $m = n + k$, где $m = 0 \dots \infty$, получим:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (2.5.11)$$

Мы еще раз показали, что при целых отрицательных значениях индекса прямое разложение в ряд дает только одно линейно-независимое решение уравнения Бесселя, но в ближайшей окрестности нулевого и каждого отрицательного целого значения индекса существуют два линейно-независимых решения, которые не совпадают, но при стремлении значения индекса к целому числу или нулю они стремятся друг к другу с точностью до константы:

$$\lim_{\nu \rightarrow n} J_{-\nu}(x) = (-1)^n \lim_{\nu \rightarrow n} J_{\nu}(x) \quad (2.5.12)$$

Это важное свойство будет использовано для получения функций Неймана — второго линейно-независимого решения уравнения Бесселя при всех значениях индекса.

§ 6. Цилиндрические функции Неймана

В утверждении 2 было доказано, что при нецелом индексе уравнение Бесселя имеет два линейно-независимых решения, которые можно представить в виде разложения в ряд (2.5.9). Однако в ходе рассуждений выявились некоторые особенности функций Бесселя с отрицательным индексом, неудобные в практическом применении (например, при реализации численных методов и приближенных вычислениях на компьютере). Поэтому практическое применение в чистом виде функции Бесселя с нецелым отрицательным параметром находят достаточно редко.

Для функций Бесселя с полуцелым индексом (в том числе отрицательным), которые рассматривались отдельно, были найдены явные конечные ряды, представляющие элементарные функции (степенные и тригонометрические), и получены рекуррентные отношения для вычислений всех необходимых числовых коэффициентов этих рядов. Для практических нужд редко используются функции Бесселя с большими индексами, поэтому прямое вычисление этих функций по конечным элементарным функциям выполняется без затруднений. Благодаря этим особенностям функций Бесселя и Неймана с полуцелым индексом часто выделяют в отдельный класс.

Для того, чтобы сгладить некоторые негативные особенности разложения в ряд функций Бесселя с нецелым отрицательным индексом, Вебером была введена функция, представляющая собой сумму двух линейно-независимых решений уравнения Бесселя вида и в литературе часто называемая функцией Неймана:

$$\mathcal{N}_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad \text{для } \nu \geq 0 \quad (2.6.1)$$

Функции Неймана также принято называть цилиндрическими функциями второго рода индекса $\mathcal{V}$. За счет введения в формулу тригонометрических функций при целых значениях индекса функции Неймана существуют и являются линейно-независимыми к функциям Бесселя.

Для нахождения предельного значения при целых индексах воспользуемся тем, что при нецелых индексах два линейно-независимых решения существуют и они дифференцируемы. Раскроем неопределенность, продифференцировав правую часть по правилу Лопиталя:

$$\mathcal{N}_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\frac{\partial}{\partial \nu} (J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x))}{\frac{\partial}{\partial \nu} \sin \nu\pi} \quad (2.6.2)$$

Нам достаточно получить значение предела (2.6.2) для частного случая — нулевого индекса, после чего применить найденные ранее рекуррентные отношения для решений уравнения Бесселя. Если это второе линейно-независимое решение существует, другие линейно-независимые решения могут быть получены на основании рекуррентных отношений.

Отметим, что рекуррентные отношения для решений уравнения Бесселя с произвольным индексом были получены без использования традиционных разложений в ряд только на основании общего вида классического уравнения Бесселя, поэтому использование метода математической индукции для ненулевых целых индексов функций Неймана корректно.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0(x) &= \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial \nu} (J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x))}{\frac{\partial}{\partial \nu} \sin \nu\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=0} \end{aligned}$$

Продифференцируем разложение в ряд (2.5.9) почленно по параметру $\mathcal{V}$, используя свойства гамма-функций Эйлера, и устремив параметр $\mathcal{V}$ к нулю, получим разложение

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0(x) &= \frac{2}{\pi} J_0(x) \left(\ln \frac{x}{2} + C \right) - \\ &- \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right) \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

где C — постоянная Эйлера, приближенное значение которой составляет 0,5772157...

Используются следующие отношения для гамма-функций Эйлера, приводимые здесь без доказательства:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \cong 0,5772157...$$

$$\frac{\Gamma(u)}{\Gamma'(u)} \Big|_{u=0} = -C \quad \text{где } k \text{ — целые числа}$$

$$\frac{\Gamma(u)}{\Gamma'(u)} \Big|_{u=k} = -C + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k-1}\right) \quad (2.6.4)$$

Предел функций Неймана для ненулевого целого индекса также находится по правилу Лопиталя из (2.6.2):

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n(x) &= \lim_{\nu \rightarrow n} \mathcal{N}_\nu(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{1}{\pi \cos \nu \pi} \left(-\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - \pi J_\nu(x) \sin \nu \pi + \pi \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \cos \nu \pi \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\nu \rightarrow n} \left(\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right) \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

Функции Неймана для целого индекса в общем случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n(x) &= \frac{2}{\pi} J_n(x) \left(\ln \frac{x}{2} + C \right) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{2} \right)^n \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{-n+2k} - \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k!(k+n)!} \left(\sum_{m=1}^{n+k} \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right) \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

Для полуцелого значения индекса функций Неймана получим явное выражение через элементарные функции (степенные и тригонометрические). Рассмотрим одновременно линейную комбинацию пары линейно-независимых решений уравнения с половинным индексом:

$$\mathcal{N}_{1/2}^*(x) = \frac{\sin x \cos 0,5\pi - \cos x}{\sin 0,5\pi} \quad (2.6.7)$$

Используя формальный дифференциальный оператор (2.3.1) и леммы 2 и 3 об обратном операторе, с точностью до отрицательной константы в степени получим общий вид функций Неймана полуцелого индекса:

$$\mathcal{N}_{n+1/2}(x) = (-1)^n x^{n+1/2} \mathcal{D}^n \frac{\mathcal{N}_{1/2}^*(x)}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (2.6.8)$$

Функции Неймана, которые иногда также называют функциями Вебера по фамилии математика, предложившего их использование, связывают друг с другом те же самые рекуррентные отношения, что и классические функции Бесселя. Функции Неймана и Бесселя с одинаковыми индексами линейно-независимые и образуют фундаментальную систему решений классического уравнения Бесселя, в том числе для целых и полуцелых значений индекса.

Функции Неймана имеют в нуле неустраняемую особенность. Благодаря этому разложение по функциям Неймана используется при описании процессов, которые являются «неидеальными». Вначале исследуется вариант разложения по функциям Бесселя для «хорошей» задачи, затем используется дополнительное условие и решается задача с функциями Неймана.

Например, в задаче с колебаниями тонкой круглой мембраны используется разложение по функциям Бесселя, если мембрана цельная («хорошая мембрана»), и добавляется разложение по функциям Неймана, если в мембране имеется круглое отверстие («мембрана с дефектом»).

Распространение волн по поверхности круглого озера может быть описано при помощи функций Бесселя. Но если в озере находится остров, который будет искажать идеальную картину распространения волн, к решению обязательно добавляется использование функций Неймана.

В задаче на изгиб длинного цельного круглого цилиндра используются функции Бесселя, но в задаче на изгиб полого внутри цилиндра (труба с круглым сечением отверстия) добавляются функции Неймана, и именно они обеспечивают описание парадоксальной устойчивости к изгибу полого цилиндра по сравнению с цельным.

Это же относится к корректному описанию невыпуклых объектов — тавровых и двутавровых балок по сравнению с обыкновенными балками, прямоугольными в сечении.

Именно функции Неймана позволяют корректно описать устойчивость балок сложной формы, пустотелых труб и тонких листов, сформированных в форме гармошки, к изгибу и повышенным нагрузкам, при которых плоские листы и прямоугольные балки уже сильно прогибаются.

Функции Неймана позволяют корректно описывать процесс вблизи некоторой особенности для той или иной задачи, моделирующей неидеальный физический процесс.

Например, рассмотрим некий одинокий остров, стоящий посреди моря, по которому свободно распространяются волны. Вдали от острова волны ведут себя идеально, строго подчиняясь волновому уравнению. Однако уже в некоторой окрестности острова возникают характерные особенности распространения волн, которые на удалении от острова достаточно быстро сглаживаются и становятся незаметными. Это наглядно показывает характер поведения функций Неймана вблизи некоторой особенности.

Таким образом, функции Неймана играют огромную роль для точного математического моделирования «неидеальных процессов с дефектами» в окрестности особенности. Игнорирование дополнительного разложения по функциям Неймана при описании физических процессов с особенностями приводит к созданию некорректной математической модели и появлению неустраняемых математических псевдопарадоксов.

Если процесс построения алгоритмов вычислительных процессов для функций Бесселя универсален и обеспечивает хорошую сходимость почти во всех случаях, то перед построением модели приближенных вычислений для функций Неймана необходимо дополнительно аналитически изучить их поведение, и только после этого использовать тот или иной алгоритм. В противном случае высока вероятность некорректных вычислений и несходимости алгоритмов.

§ 7. Другие цилиндрические функции

Любая линейная комбинация частных решений классического уравнения Бесселя — функций Бесселя (неотрицательного индекса) и функций Неймана — также является общим решением уравнения Бесселя. Существует представление функции экспоненты от чисто мнимого аргумента через периодические тригонометрические функции:

$$\exp ix = \cos x + i \sin x \quad \text{где } i^2 = -1 \quad (2.7.1)$$

$$\exp ix = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{ix}{k!} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Если построить аналогичные зависимости между фундаментальными решениями уравнения Бесселя, можно получить достаточно интересный класс функций. Цилиндрическими функциями третьего рода или функциями Ганкеля называют следующие функции:

$$\mathcal{H}_\nu(x) = J_\nu(x) \pm i \mathcal{N}_\nu(x) \quad \text{где } i^2 = -1 \quad (2.7.2)$$

Используя представление функций Неймана (2.6.1) через функции Бесселя, можем записать:

$$\mathcal{H}_\nu(x) = \frac{J_{-\nu}(x) - J_\nu(x) \exp \mp i\pi\nu}{\pm i \sin \pi\nu} \quad (2.7.3)$$

При действительных переменных функции имеют комплексные значения. Формулы справедливы и при целых индексах, которые получают путем предельного перехода.

В задаче о получении решения волнового уравнения функции Бесселя действительного аргумента являются образом стоячей волны. Функции Ганкеля позволяют дать образ распространяющейся волны. Поэтому функции Ганкеля играют очень большую роль в физических процессах, особенно при изучении волновых процессов в неограниченных областях. Функции Ганкеля используются не только в практических задачах, но и в некоторых аспектах теории функций Бесселя.

Заменим в уравнении Бесселя и разложении в ряд функций Бесселя действительную переменную x на чисто мнимую переменную ix и запишем:

$$x^2 z''(x) + x z'(x) - (x^2 + \nu^2) z(x) = 0 \quad (2.7.2)$$

$$J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(ix/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}$$

Функция Бесселя чисто мнимого аргумента имеет определенное неудобство — при четном индексе она является действительной, а при нечетной — чисто мнимой функцией. Чтобы избавиться от этого неудобства и получить действительную функцию при любых значениях индекса, вводят модифицированную функцию Бесселя:

$$I_\nu(x) = J_\nu(ix) \exp(i\pi\nu/2) \quad (2.7.3)$$

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \quad (2.7.4)$$

В качестве второго частного линейно-независимого решения уравнения (2.7.2), называемого модифицированным уравнением Бесселя, обычно принимают функцию, называемую функцией Макдональда, которая действительна при любом действительном значении индекса:

$$\mathcal{K}_\nu(x) = \frac{i\pi \exp(i\pi\nu/2)}{2} \mathcal{H}_\nu(x) \quad (2.7.5)$$

Очевидно, что функция Макдональда нецелого индекса также является линейной комбинацией двух линейно-независимых решений уравнения Бесселя — функций Бесселя положительного и отрицательного индекса:

$$\mathcal{K}_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{J_{-\nu}(x) - J_\nu(x)}{\sin \pi\nu} \quad (2.7.6)$$

Доказательство существования функции Макдональда целого индекса проводится аналогично доказательству существования функций Неймана целого индекса — дифференцированием по правилу Лопиталья.

$$\mathcal{K}_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \mathcal{K}_\nu(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\frac{\partial}{\partial \nu} (J_{-\nu}(x) - J_\nu(x))}{\frac{\partial}{\partial \nu} \sin \nu\pi} \frac{\pi}{2}$$

$$\mathcal{K}_n(x) = \frac{1}{2} (-1)^n \lim_{\nu \rightarrow n} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) \right)$$

Через разложение в ряд с последующим дифференцированием по параметру ν можно показать, что этот предел существует. В случае целого индекса функции Макдональда примут вид:

$$\mathcal{K}_n(x) = (-1)^{n+1} I_n(x) \left(\ln \frac{2}{\pi} - C \right) + \quad (2.7.7)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{-n+2k} +$$

$$+ (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(k+n)!} \left(\sum_{m=1}^{n+k} \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right)$$

Модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда образуют общее решение модифицированного уравнения Бесселя:

$$x^2 z''(x) + x z'(x) - (x^2 + \nu^2) z(x) = 0 \quad (2.7.2)$$

$$z(x) = c_1 I_\nu(x) + c_2 \mathcal{K}_\nu(x) \quad (2.7.8)$$

Мы не будем подробно исследовать решения модифицированного уравнения Бесселя. Можно заметить, что при положительном значении индекса графики функций напоминают гиперболу

$$z(x)x \cong \text{const}$$

и при фиксированном значении переменной растут вместе со значением индекса. Модифицированные функции Бесселя монотонно растут с ростом переменной. Функции Макдональда имеют в нуле неустранимую особенность и монотонно убывают с ростом переменной, стремясь к нулю на бесконечности. Функции актуальны в электродинамике.

§ 8. Поведение цилиндрических функций в окрестности нуля

Рассмотрим поведение цилиндрических функций в окрестности нуля — при достаточно малых значениях переменной. О поведении этих функций мы можем судить, исследуя поведение бесконечных рядов (2.5.8), (2.5.9) и (2.6.6) в окрестности начала координат. Поскольку члены этих рядов убывают достаточно быстро, поведение функций можно определить по нескольким первым членам разложения ряда. Рассмотрим различные типы цилиндрических функций.

Ограниченные функции Бесселя с нулевым индексом. Рассматривая разложение (2.5.8) в окрестности нуля, мы можем заключить, что пренебрегая быстроубывающими членами

$$J_0(x) \approx 1 - x^2/4 + \dots \quad \text{и} \quad J_0(0) = 1 \quad (2.8.1)$$

Функция Бесселя с нулевым индексом в нуле равна единице и убывает вблизи начала координат.

Ограниченные функции Бесселя с ненулевым индексом. Рассмотрим разложение в ряд при любых ненулевых положительных значениях индекса:

$$J_\nu(x) \approx \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \quad \text{для } \nu > 0 \quad \text{и} \quad J_\nu(0) = 0 \quad (2.8.2)$$

Функция Бесселя с ненулевым индексом в нуле равна нулю и возрастает вблизи начала координат.

Неограниченные функции Бесселя с нецелым индексом. Рассмотрим разложение в ряд при любых нецелых отрицательных значениях индекса:

$$J_{-\nu}(x) \approx \frac{2^\nu}{x^\nu \Gamma(-\nu+1)} \quad \text{для } \nu > 0 \quad (2.8.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} J_{-\nu}(x) = +\infty \quad \text{— неустраняемая особенность.}$$

При стремлении к нулю справа (со стороны положительных значений переменной) функция Бесселя убывает. При стремлении к нулю функция Бесселя с нецелым отрицательным индексом стремится к бесконечности и имеет неустраняемый разрыв.

Неограниченные функции Неймана. Все функции Неймана в нуле имеют неустраняемый разрыв и стремятся к бесконечности. В случае нецелого индекса используется представление функции Неймана через функции Бесселя положительного и отрицательного индекса (2.6.1) и особенности поведения входящих в него функций Бесселя:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \mathcal{N}_\nu(x) = -\infty \quad \text{для } \nu \neq n \quad (2.8.4)$$

При целых положительных значениях индекса используем начальные члены разложения ряда (2.6.6):

$$\mathcal{N}_n(x) \approx \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} (n-1)! \left(\frac{2}{x}\right)^n \quad (2.8.5)$$

Стремление к бесконечности обусловлено наличием логарифмического и степенного члена разложения ряда.

При решении практических задач с использованием функций Бесселя и Неймана обычно рассматривают только положительные значения переменной — поиск решений задач производится на положительной полуоси.

Практическое использование функций Бесселя неотрицательного индекса и разложения в ряд в достаточно малой окрестности нуля позволяет получать очень хорошие быстро сходящиеся конечные последовательности, состоящие из малого числа членов ряда.

Практическое использование функций Неймана в малых окрестностях нуля и разложения в ряд имеет определенные особенности.

Для того, чтобы корректно использовать численные методы и компьютерные алгоритмы, необходимо исключать из рассмотрения малые окрестности нулевого значения переменной функций Неймана — окрестность, в которой функции Неймана имеют выраженную неустраняемую особенность и стремятся к бесконечности. Поведение функций Неймана и математической модели в целом в этой «критической» окрестности изучается отдельно.

§ 9. Корни решений уравнения Бесселя

Для того, чтобы понять, какие корни имеют решения уравнения Бесселя, необходимо представить себе поведение функций Бесселя вдали от начала координат. Рассмотрим уравнение, к которому приводится уравнение Бесселя:

$$y_v''(x) - \frac{(v-1/2)(v+1/2)}{x^2} y_v(x) = -y_v(x) \quad (2.1.5)$$

$$J_v(x) = y_v(x) / \sqrt{x} \quad \text{для всех } v \quad (2.1.6)$$

Это связано с тем, что при любом ограниченном значении индекса функций Бесселя потенциал соответствующего ему уравнения Штурма-Лиувилля стремится к нулю:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(v-1/2)(v+1/2)}{x^2} = 0 \quad \text{для всех } v \quad (2.9.1)$$

Поэтому есть основания полагать, что и корни уравнения Бесселя при удаленных от нуля значениях переменной будут стремиться к корням волнового дифференциального уравнения при всех ограниченных значениях индекса:

$$y''(x) + y(x) = 0 \quad \text{для всех } v \quad (2.9.2)$$

При достаточно удаленных от нуля значениях переменной решение уравнения (2.1.5) стремится к линейной комбинации двух линейно-независимых тригонометрических колебательных функций:

$$y(x) \cong c_1 \sin x + c_2 \cos x \quad \text{при } x \rightarrow +\infty \quad (2.9.3)$$

Если рассматривать два линейно-независимых частных решения волнового уравнения, которым соответствуют две линейно-независимые функции Бесселя с положительным и отрицательным индексом (или функции Бесселя и Неймана), можно предположить, что корни функций Бесселя существуют и при росте переменной стремятся к постоянному интервалу π . Исследование корней функций Бесселя исторически связано с решением практических задач.

Утверждение 4. Все корни решений уравнения Бесселя, кроме возможно нуля, являются простыми.

Доказательство. Рассмотрим некоторую цилиндрическую функцию $z(x)$, имеющую корни при отличных от нуля значениях переменной:

$$x^2 z''(x) + x z'(x) + (x^2 - v^2) z(x) = 0 \quad (2.1.1)$$

Если предположить, что существует хотя бы один корень решений этого уравнения, который не является простым и имеет порядок выше единицы, это значит, что и первая производная этой функции равна нулю:

$$z(x_0) = 0 \quad \text{и} \quad z'(x_0) = 0 \quad \text{при } x_0 \neq 0$$

Подставив эти значения в уравнения Бесселя, получим требование тождественного равенства нулю второй производной рассматриваемой функции.

$$z''(x_0) = 0 \quad \text{при } x_0 \neq 0$$

Продифференцируем уравнение Бесселя и подставим туда полученные значения корня функции, первой и второй производных. Мы получим требование равенства нулю третьей производной при ненулевых значениях переменной.

Продолжая использование метода математической индукции, по аналогии доказывается тождественное равенство нулю всех старших производных. Отсюда следует, что функция тождественно обращается в ноль при всех значениях переменной. Это невозможно, так как ранее мы доказали существование невырожденных решений уравнения.

Поэтому решение уравнения Бесселя вне нуля может иметь только простые корни. **Утверждение доказано.**

Если функции Бесселя с положительным индексом имеют корень в нуле, то его порядок совпадает с индексом функции Бесселя. Это следует из вида разложения ряда.

При значении индекса больше -1 функции Бесселя не имеют чисто мнимых и комплексных корней. Это следует из свойств функций и сопряженных интегралов, в которые трансформируются функции Бесселя при замене действительного переменного на чисто мнимый (модифицированные функции Бесселя и функции Макдональда, монотонно возрастающие или убывающие на положительной полуоси).

Утверждение 5. Корни последовательных решений уравнения Бесселя перемежаются друг с другом:

$$z_\nu(x_1) = z_{\nu+1}(x_2) = z_\nu(x_3) = z_{\nu+1}(x_4) = \dots = 0$$

где $0 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots$ для $\nu \geq 0$ (2.9.4)

Доказательство. Воспользуемся рекуррентными отношениями для решений уравнения Бесселя. Продифференцируем решение уравнения Бесселя, умноженное на некоторую степенную функцию:

$$\frac{d}{dx}(x^\omega z_\nu(x)) = \omega x^{\omega-1} z_\nu(x) + x^\omega z'_\nu(x) \quad (2.9.5)$$

$$z_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x} z_\nu(x) - z'_\nu(x) \quad \text{для всех } \nu$$

Поэтому мы можем записать выражение (2.9.5)

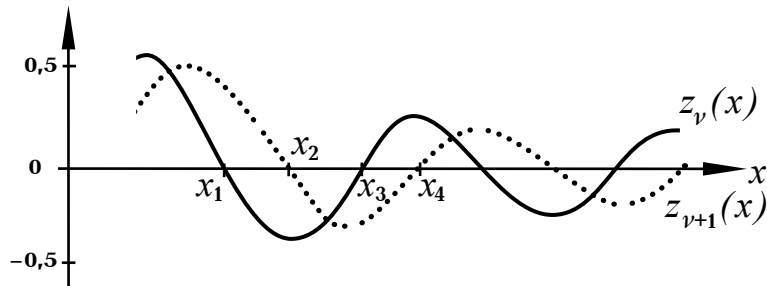
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^\omega z_\nu(x)) &= \omega x^{\omega-1} z_\nu(x) + \\ &+ x^\omega \left(\frac{\nu}{x} z_\nu(x) - z_{\nu+1}(x) \right) \end{aligned}$$

Можно легко заметить, что если положить введенное значение параметра ω , равное $\omega = -\nu$ значения индекса решения уравнения Бесселя, тождество примет вид:

$$\frac{d}{dx}(x^{-\nu} z_\nu(x)) = -x^{-\nu} z_{\nu+1}(x) \quad (2.9.6)$$

Рассмотрим некоторое решение уравнения Бесселя с индексом ν и два его соседних корня:

$$z_\nu(x_1) = z_\nu(x_3) \quad \text{для } x_1 < x_3$$



64 Рис. 4. Перемежающиеся корни решений уравнения Бесселя

В соответствии с теоремой Ролля, между двумя соседними корнями гладкой и дифференцируемой функции, умноженной на монотонную функцию, не меняющую знака, должен находиться хотя один максимум или минимум, в котором первая производная произведения обращается в ноль. Это значит, что существует такая точка θ , что

$$0 \leq x_1 < \theta < x_2 \quad \text{и} \quad (\theta^{-\nu} z_\nu(\theta))' = 0 \quad (2.9.7)$$

Подставив это значение в полученное уравнение (2.9.6), которое выполняется при всех значениях переменной, мы доказали, что между двумя корнями решения уравнения Бесселя с индексом ν должен находиться хотя бы один корень решения уравнения с индексом $\nu+1$.

Для доказательства того, что между двумя корнями решения уравнения Бесселя с индексом $\nu+1$ находится хотя бы одно решение уравнения Бесселя с индексом ν , повторим рассуждения, используя второе рекуррентное отношение между решениями уравнения Бесселя:

$$\begin{aligned} z_\nu(x) &= \frac{\nu}{x} z_{\nu+1}(x) + z'_{\nu+1}(x) \quad \text{для всех } \nu \\ \frac{d}{dx}(x^\omega z_{\nu+1}(x)) &= \omega x^{\omega-1} z_{\nu+1}(x) + x^\omega z'_{\nu+1}(x) = \\ &= \omega x^{\omega-1} z_{\nu+1}(x) + x^\omega \left(z_\nu(x) - \frac{\nu}{x} z_{\nu+1}(x) \right) \end{aligned}$$

Если положить введенное значение параметра ω , равное $\omega = \nu$ значению индекса решения уравнения Бесселя, тождество примет вид:

$$\frac{d}{dx}(x^\nu z_{\nu+1}(x)) = x^\nu z_\nu(x) \quad (2.9.8)$$

Существование хотя бы одного корня доказывается аналогичными рассуждениями. Проведя рассуждения в обе стороны для двух решений уравнения Бесселя, связанных рекуррентными отношениями, мы доказали не только существование перемежающихся друг с другом корней, но и то, что между двумя соседними корнями одного решения уравнения Бесселя существует только один корень связанного с ним рекуррентными отношениями другого решения уравнения Бесселя индекса, отличного на единицу.

Утверждение доказано.

Для того, чтобы доказать следующее утверждение, рассмотрим определитель Вронского. Если существуют два линейно-независимых решения уравнения Бесселя, то они удовлетворяют следующему отношению:

$$z_\nu(x) z_{-\nu}'(x) - z_{-\nu}'(x) z_\nu(x) = c/x \quad (2.9.9)$$

где $c \neq 0$ — некоторая константа.

Если мы подставим в уравнение Бесселя

$$x^2 z''(x) + x z'(x) - (x^2 + \nu^2) z(x) = 0 \quad (2.7.2)$$

решение этого уравнения с формальным положительным индексом и умножим на решение с формальным отрицательным индексом, а затем в это же уравнение подставим решение с отрицательным индексом, умноженное на решение с положительным индексом, а затем вычтем первое полученное уравнение из второго, мы получим:

$$z_\nu(x) \frac{d}{dx} (x z_{-\nu}(x)) - z_{-\nu}(x) \frac{d}{dx} (x z_\nu(x)) = 0$$

$$\text{или } \frac{d}{dx} (x (z_\nu(x) z_{-\nu}'(x) - z_{-\nu}'(x) z_\nu(x))) = 0$$

Формально проинтегрировав полученное выражение, получим тождество (2.9.9), которое и требовалось доказать. Левая часть тождества называется определителем Вронского или вронскианом уравнения Бесселя:

$$\mathcal{W}(z_\nu(x), z_{-\nu}(x)) = \begin{vmatrix} z_\nu(x) & z_{-\nu}(x) \\ z_\nu'(x) & z_{-\nu}'(x) \end{vmatrix} \quad (2.9.10)$$

Если решения уравнения Бесселя линейно-независимые, определитель Вронского для них невырожденный. Если решения уравнения линейно-зависимые, определитель Вронского тождественно вырождается в ноль.

Для нахождения определителя Вронского для функций Бесселя воспользуемся разложением этих функций в ряд и получим константу при некотором конкретном значении переменной. Так как определитель Вронского имеет вид (2.9.9), умножим обе части этого равенства на X и положим нулевое значение переменной (удобное при рассмотрении разложения в ряд).

$$J_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} (1 + O(x^2)) \quad (2.9.11)$$

$$J_\nu'(x) = \frac{(x/2)^{\nu-1}}{2\Gamma(\nu)} (1 + O(x^2))$$

где $\lim_{x \rightarrow 0} |O(x^2)/x^2| < \infty$ — обозначение.

Подставим полученные значения в (2.9.9) и запишем

$$\begin{aligned} J_\nu(x) J_{-\nu}'(x) - J_{-\nu}'(x) J_\nu(x) &= \\ &= \frac{1}{x} \frac{-2}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu)} + O(x) \Big|_{x \rightarrow 0} \end{aligned}$$

Отсюда получим значение константы C и определителя Вронского для двух линейно-независимых функций Бесселя, представляющих решения уравнения Бесселя:

$$J_\nu(x) J_{-\nu}'(x) - J_{-\nu}'(x) J_\nu(x) = -\frac{2 \sin \pi \nu}{x \pi} \quad (2.9.12)$$

Аналогичным образом устанавливается соотношение между второй парой линейно-независимых решений уравнения Бесселя — функции Бесселя с неотрицательным индексом и функции Неймана, существующих при всех значениях индекса (включая и целые):

$$J_\nu(x) \mathcal{N}_\nu'(x) - J_\nu'(x) \mathcal{N}_\nu(x) = 2/(\pi x) \quad (2.9.13)$$

Для изучения поведения корней двух линейно-независимых решений уравнения Бесселя используем полученный обобщенный определитель Вронского (2.9.9), который в этом случае не вырожден.

Утверждение 6. *Корни двух линейно-независимых решений уравнения Бесселя, имеющих один и тот же индекс, перемежаются друг с другом.*

$$\begin{aligned} z_\nu(x_1) = z_{-\nu}(x_2) = z_\nu(x_3) = z_{-\nu}(x_4) = \dots = 0 \\ \text{где } 0 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots \text{ для } \nu \geq 0 \end{aligned} \quad (2.9.14)$$

Доказательство. Рассмотрим два последовательных корня одного из линейно-независимых решений уравнения Бесселя (для удобства рассмотрим решение с формально положительным индексом)

$$z_\nu(x_1) = z_\nu(x_3) = 0$$

В соответствии с доказанным ранее утверждением, решения уравнения Бесселя вне нуля имеют только простые корни, а значит производные на корнях не равны нулю:

$$z'_\nu(x_1) \neq 0 \quad \text{и} \quad z'_\nu(x_3) \neq 0$$

Между двумя соседними корнями функция Бесселя не меняет знак, она либо только положительная, либо только отрицательная. Аналитическая функция между этими корнями имеет достижимый экстремум (максимум или минимум), а производная достигает на экстремуме нулевое значение и меняет свой знак на противоположный:

$$\text{sign } z'_\nu(x_1) = (-1) \text{sign } z'_\nu(x_3)$$

Определитель Вронского для первого и второго корня решения формально положительного индекса будет:

$$\begin{aligned} -z'_\nu(x_1)z_{-\nu}(x_1) &= c/x_1 \\ -z'_\nu(x_3)z_{-\nu}(x_3) &= c/x_3 \end{aligned}$$

Из-за того, что переменная x неотрицательная, а производные решения уравнения Бесселя с положительным индексом на корнях меняет знак, из полученных отношений следует, что второе линейно-независимое решение уравнения Бесселя с отрицательным индексом также меняет знак:

$$\text{sign } z_{-\nu}(x_1) = (-1) \text{sign } z_{-\nu}(x_3)$$

Если аналитическая непрерывная дифференцируемая функция меняет знак на некотором интервале, это означает, что она имеет на нем хотя бы один корень. То, что между двумя корнями решения уравнения Бесселя находится только один корень второго линейно-независимого решения уравнения доказывается, применив рассуждения для функции с формально отрицательным индексом. Таким образом, корни перемежаются у линейно-независимых решений одного уравнения и решений, связанных рекуррентным отношением, индекс которых отличается на единицу.

Если корни двух линейно-независимых решений уравнения вне нуля совпадут, то определитель Вронского для уравнения Бесселя не будет соответствовать отношению (2.9.9) и выродится. Поэтому корни двух линейно-независимых решений уравнения Бесселя с одинаковым индексом не совпадают, а перемежаются друг с другом.

Утверждение доказано.

Для наименьших (ближайших к нулю) невырожденных корней функции Бесселя выполняются отношения:

$$\begin{aligned} J_\nu(\xi) &= 0 \quad \text{для } \nu \geq 0 \text{ и } \xi > 0 \\ \sqrt{\nu(\nu+2)} &< \xi_\nu < \sqrt{2(\nu+1)(\nu+3)} \\ \sqrt{\nu(\nu+2)} &< \xi'_\nu < \sqrt{2\nu(\nu+1)} \\ \sqrt{\nu(\nu-1)} &< \xi''_\nu < \sqrt{\nu^2-1} \end{aligned} \quad (2.9.15)$$

Если конкретный корень линейно-независимого решения уравнения Бесселя рассматривать как функцию от значения параметра — индекса ν , то выявится, что эту функцию можно рассматривать как непрерывно возрастающую функцию аргумента ν .

При возрастании индекса ν — параметра первый ненулевой корень решения уравнения Бесселя удаляется от нуля. То же самое происходит и с каждым последующим корнем решения уравнения Бесселя, рассматриваемый как параметрическая функция от аргумента ν .

Из приведенных выше рассуждений следует, что если решение уравнения Бесселя имеет корни, отличные от нуля, то эти корни образуют бесконечное множество.

При стремлении значения переменной к бесконечности на положительной полуоси интервал между корнями этого решения стремится к постоянной величине. Вообще, исследование поведения корней является сложной задачей.

В соответствии с предположением Бурже, различные решения уравнения Бесселя — функции Бесселя, индекс которых отличается на целое число, не имеют общих корней за исключением нулевого.

Из приведенных рассуждений можно сделать следующие интересные заключения об особенностях поведения корней решений уравнения Бесселя — в частности, поведения функций Бесселя неотрицательного индекса, ограниченных в нуле.

Мы доказали, что функции Бесселя, индекс которых отличается на единицу, имеют перемежающиеся корни (наглядная иллюстрация приведена на рис. 4). Более того, мы показали, что для одной функции Бесселя значение достижимого экстремума (минимума или максимума) строго не совпадает с нулем второй рассматриваемой функции Бесселя, и наоборот (смещение друг относительно друга).

Это связано с применением теоремы Ролля для доказательства существования корней к произведению функции Бесселя, умноженной на некоторую монотонную функцию, не меняющую знак (в данном случае степенную) — отношения (2.9.6) и (2.9.8). Это свойство отличает функции Бесселя от тригонометрических колебательных функций, в которых экстремум одной функции совпадает с нулем другой, и делает затруднительным аналитический поиск решений — точек, где выполняется тождество:

$$\frac{d}{dx}(x^{-\nu} J_{\nu}(x)) = \frac{d}{dx} F_{\nu}(x) = 0 \quad (2.9.16)$$

Ранее было доказано, что функции Бесселя ненулевого индекса имеют корень в нуле и в некоторой его окрестности возрастают. Поскольку на бесконечности функции Бесселя асимптотически стремятся к нулю (имеют асимптотический корень), это означает, что между нулем и бесконечностью существует хотя бы один достижимый (конечный) максимум функции Бесселя. Существование хотя бы одного максимума функций Бесселя положительного индекса доказано.

Рассмотрим поведение первого корня и первого максимума, которые находятся ближе всего к началу координат, у функций Бесселя строго положительного индекса. Обозначим соответственно параметрические функции:

$$\zeta(\nu) — \text{первый максимум } J_{\nu}(x) \quad (2.9.17)$$

$$\xi(\nu) — \text{первый после нуля корень } J_{\nu}(x) \text{ для } \nu > 0$$

Будем исходить из положения, что корень существует.

Поскольку функция, описывающая поведение первого корня в зависимости от значения параметра, является монотонно возрастающей с ростом индекса, и нулевой корень существует, это также означает, что при убывании индекса первый ненулевой корень приближается к нулю.

Между нулем и первым корнем у функции Бесселя находится максимум, который также постепенно смещается к началу координат при убывании индекса.

Функция Бесселя нулевого индекса и ее значение в нуле, равное единице, является результатом предельного поведения введенных в рассмотрение параметрических функций при стремлении значения индекса к нулю в окрестности начала координат:

$$\begin{aligned} \xi(\nu) \rightarrow 0 \text{ при } \nu \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \zeta(\nu) \rightarrow 0 \text{ при } \nu \rightarrow 0 \\ \lim_{\nu \rightarrow 0} \zeta(\nu) = J_0(0) = 1 \end{aligned}$$

Фактически, при стремлении значения индекса к нулю вблизи начала координат первый максимум также стремится к началу координат, пока в пределе не «слипается» с ним — это объясняет кажущийся парадокс и особенность поведения в нуле функций Бесселя нулевого индекса.

Поведение функций Бесселя очень большого индекса также рассматривается отдельно. При проведении большинства доказательств, связанных с разложениями в ряд, мы каждый раз предполагали, что значение индекса функций Бесселя конечно. Однако при стремлении индекса функций Бесселя к бесконечности первый максимум неограниченно отодвигается от начала координат к бесконечности, а его значение уменьшается.

Поэтому при предельном значении индекса, равного бесконечности (не рассматриваемый в теории случай), асимптотический максимум совпадает с асимптотическим нулем, и функция Бесселя бесконечного индекса вырождается в прямую, совпадающую с числовой полуосью.

На практике при проведении достаточно точных вычислений и построении довольно точных моделей при разложении в ряд по функциям Бесселя используют не более 8-12 последовательных функций Бесселя, связанных друг с другом рекуррентными отношениями. А для рядовых моделей используется не более 3-4 функций Бесселя.

На сегодняшний день наиболее простым и реальным способом нахождения корней и достижимых экстремумов (минимумов и максимумов) функций Бесселя и Неймана положительного индекса вблизи начала координат и на некотором удалении от него является использование современной компьютерной техники и разложения в ряды.

Компьютеры должны иметь ядро процессора для проведения корректных вычислений с плавающей точкой и встроенный в процессор математический аппарат, позволяющей осуществлять математические вычисления с очень высокой точностью. Точность вычислений процессора должна быть существенно (на много порядков) выше той заданной точности, с которой проводятся конкретные алгоритмические вычисления пользователем по рядам.

Перед проведением конкретных вычислений с использованием функций Бесселя и Неймана рекомендуется аналитически изучить уравнения и используемые для него разложения и функции. Поведение функций Бесселя, рассматриваемых как параметрические функции от значения индекса, является достаточно хорошим — функции, у которых индекс незначительно отличается друг от друга, ведут себя очень похожим образом и в приближенных практических математических моделях могут быть с успехом заменены друг другом.

При практических вычислениях функции Бесселя, индекс которых близок к целым и полуцелым значениям, можно заменять на соответствующие очень хорошо изученные функции Бесселя целого и полуцелого индекса, делая некоторую поправку на точность вычислений (например, нужно брать несколько больше членов разложения ряда для поправки точности). Функции Бесселя целого индекса практически очень хорошо изучены, а значения полуцелого индекса позволяют использовать для них конечные разложения в ряд по аналитическим функциям.

Никогда нельзя использовать слишком большое количество функций Бесселя для построения итераций, так как чрезмерное увеличение их количества никогда не приведет к повышению точности практических компьютерных вычислений, а только создаст неоправданные нагрузки на вычислительную технику, процессор и может ухудшить сходимость отдельных вычислительных алгоритмов. В случаях использования некорректных процессоров результат избыточных вычислений может быть сильно искажен из-за лавинообразного накопления погрешности вычислений.

Таблица значений функций Бесселя целого и полуцелого индекса при целых значениях переменной

ν	$J_\nu(1)$	$J_\nu(2)$	$J_\nu(3)$	$J_\nu(4)$	$J_\nu(5)$
0	0.765	0.224	0.260	0.397	0.178
0.5	0.671	0.513	0.065	0.302	0.342
1	0.440	0.577	0.339	0.066	0.328
1.5	0.240	0.491	0.478	0.185	0.170
2	0.115	0.353	0.486	0.364	0.017
2.5	0.050	0.224	0.413	0.441	0.240
3	0.020	0.129	0.309	0.130	0.365
3.5	0.007	0.069	0.210	0.366	0.410
4	0.002	0.034	0.132	0.281	0.391
4.5	0.001	0.016	0.078	0.199	0.334
5	0.000	0.007	0.043	0.132	0.261
5.5	0.000	0.002	0.022	0.083	0.191
6	0.000	0.001	0.011	0.049	0.131
6.5	0.000	0.000	0.001	0.028	0.086

Первые пять корней функций Бесселя целого индекса $\nu = 0, 1, 2$ и 3

корни	$J_0(x)=0$	$J_1(x)=0$	$J_2(x)=0$	$J_3(x)=0$	$\mathcal{N}_0(x)=0$
1	2.405	3.832	5.136	6.380	0.894
2	5.520	7.016	8.417	9.761	3.958
3	8.654	10.173	11.620	13.015	7.086
4	11.791	13.324	14.796	16.223	10.222
5	14.931	16.471	17.960	19.409	13.361

Приведенные таблицы наглядно показывают характер поведения корней функций Бесселя и дают приближенные значения функций Бесселя с точностью до четвертого знака после запятой.

Таблица значений функций Бесселя и Неймана

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$\mathcal{N}_0(x)$	$\mathcal{N}_1(x)$	$\mathcal{N}_2(x)$
0	1.0	0.0	0.0	—	—	—
0.5	0.938	0.242	0.031	-0.445	-1.471	-5.440
1	0.765	0.440	0.115	0.088	-0.781	-1.651
1.5	0.512	0.558	0.232	0.382	-0.421	-0.932
2	0.244	0.577	0.353	0.510	-0.107	-0.617
2.5	-0.048	0.497	0.446	0.498	0.146	-0.381
3	-0.260	0.339	0.486	0.377	0.325	-0.160
3.5	-0.380	0.137	0.459	0.189	0.410	0.045
4	-0.397	-0.066	0.364	-0.017	0.398	0.216
4.5	-0.321	-0.231	0.218	-0.195	0.301	0.338
5	-0.178	-0.328	0.046	-0.309	0.148	0.368
5.5	-0.007	-0.341	-0.117	-0.339	-0.024	0.331
6	0.151	-0.277	-0.243	-0.288	-0.175	0.230
6.5	0.260	-0.154	-0.307	-0.173	-0.274	0.089
7	0.300	-0.005	-0.301	-0.026	-0.303	-0.061
7.5	0.266	0.135	-0.230	0.117	-0.259	-0.186
8	0.172	0.235	-0.113	0.244	-0.158	-0.263
8.5	0.042	0.273	0.022	0.270	-0.026	-0.276
9	-0.090	0.245	0.145	0.250	0.104	-0.227
9.5	-0.194	0.161	0.228	0.171	0.203	-0.128
10	-0.246	0.043	0.255	0.056	0.249	-0.006
11	-0.171	-0.177	0.139	-0.169	0.164	0.199
12	0.048	-0.224	-0.085	-0.225	-0.057	0.216
13	0.207	-0.070	-0.218	-0.078	-0.210	0.046
14	0.171	0.133	-0.152	0.127	-0.167	-0.151
15	-0.014	0.205	0.042	0.205	0.021	-0.203

Приведенные таблицы не являются слишком подробными, так как их основная цель — дать общее представление о поведении функций Бесселя и Неймана вблизи начала координат. Ячейки, где функции имеют отрицательное значение, окрашены. Наиболее близкие к корням значения функций выделены жирным шрифтом.

§ 10. Асимптотическое поведение функций Бесселя и Неймана

Исследовав поведение функций Бесселя и функций Неймана недалеко от начала координат (вблизи нуля), мы перейдем к более подробному изучению асимптотического поведения этих функций вдали от начала координат, при стремлении переменной к бесконечности для ограниченных индексов (параметров уравнения).

Мы заметили, что при стремлении переменной к бесконечности уравнение Штурма-Лиувилля, к которому приводится уравнение Бесселя:

$$y_v''(x) - \frac{(v-1/2)(v+1/2)}{x^2} y_v(x) = -y_v(x) \quad (2.1.5)$$

$$J_v(x) = y_v(x) / \sqrt{x} \quad \text{для всех } v \quad (2.1.6)$$

стремится к типичному волновому уравнению:

$$y''(x) + y(x) = 0 \quad \text{для всех } v \quad (2.9.2)$$

Ранее мы установили, то для полуцелых значений функций Бесселя положительного и отрицательного индекса можно получить конечное разложение в ряд через степенные и тригонометрические функции. Функции Бесселя полуцелого индекса могут быть точно выражены конечным рядом элементарных функций. Полученное разложение по элементарным функциям было сделано на основании рекуррентных отношений решений уравнения Бесселя и базового решения волнового уравнения.

Исходя из общих рассуждений о сходстве поведения функций Бесселя, имеющих близкий индекс, можно допустить, что вблизи всех полуцелых значений индекса функции Бесселя также ведут себя очень сходно. Поэтому поведение любых функций Бесселя можно описать, используя метод последовательных приближений — интерполирование конечными рядами степенных и тригонометрических функций, аналогичных тем, которые используются для получения функций Бесселя с полуцелыми индексами.

Разложения для функций Бесселя полуцелого индекса можно представить через произведение синусов и косинусов, переменной половинной степени и конечных степенных рядов отрицательной степени.

Поэтому есть все основания предполагать, что асимптотическое поведение решений уравнения Бесселя также может быть получено через степенные и тригонометрические функции методом последовательных приближений.

Чтобы получить приближения для функций Бесселя, рассмотрим уравнение Штурма-Лиувилля, к которому сводится уравнение Бесселя, и будем искать последовательные приближения для решений уравнения, сходного с волновым на удалении от начала координат:

$$y''(x) + \left(\frac{\omega}{x^2} + 1\right)y(x) = 0 \quad (2.10.1)$$

$$y(x) \equiv \sum_{k=0}^m x^{-k} (V_k \sin x + W_k \cos x) + o(x^{-m}) \quad (2.10.2)$$

и используется обозначение $\lim_{z \rightarrow \infty} o(z)/z = 0$

Для нулевого приближения мы получим классическое решение волнового уравнения — через тригонометрические функции. Далее применим метод математической индукции. Рассмотрим m приближение. Подставим ряд (2.10.2) в уравнение (2.10.1) и будем пренебрегать всеми членами ряда, степень которых больше m и составляет $o(x^{-m})$. Это допущение позволит получить значения коэффициентов ряда.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m 2(-k)(V_k \cos x - W_k \sin x)x^{-k-1} + \\ & + (-k)(-k-1)(V_k \sin x + W_k \cos x)x^{-k-2} + \\ & + (V_k \sin x + W_k \cos x)\omega x^{-k-2} \equiv 0 \end{aligned} \quad (2.10.3)$$

Домножим полученный ряд на переменную x и проигнорируем член ряда при степени $-(m+1)$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m -2k(V_k \cos x - W_k \sin x)x^{-k} + \\ & + (V_k \sin x + W_k \cos x)x^{-k-1}(k(k+1) + \omega) \equiv 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m -2k(V_k \cos x - W_k \sin x)x^{-k} + \sum_{k=1}^m x^{-k}(\omega + \\ & + k(k-1))(V_{k-1} \sin x + W_{k-1} \cos x) + o(x^{-m}) \equiv 0 \end{aligned}$$

В том случае, когда индекс (параметр) решения уравнения Штурма-Лиувилля является полуцелым, количество членов ряда будет остановлено на некотором значении. В противном случае используются последовательные приближения, количество которых формально не ограничено.

Ограничения на начальные коэффициенты отсутствуют и зависят от конкретных начальных условий и допущений, поэтому следующие коэффициенты произвольны

V_0 и W_0 — произвольные по выбору константы и

$$\begin{aligned} x^{-k} \cos x & \left| \begin{array}{l} -2kV_k + (\omega + k(k-1))W_{k-1} = 0 \\ 2kW_k + (\omega + k(k-1))V_{k-1} = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Отсюда получим набор рекуррентных отношений:

$$V_k = W_{k-1}(\omega + k(k-1)) / 2k \quad (2.10.4)$$

$$W_k = -V_{k-1}(\omega + k(k-1)) / 2k$$

Таким образом, мы нашли значения коэффициентов для произвольной ограниченной итерации — конечного ряда приближения. Поскольку рекуррентные отношения для коэффициентов стартуют с нулевых, произвольных по выбору, пользуясь методом математической индукции, мы можем записать рекуррентные отношения для коэффициентов любого конечного члена ряда разложения.

$$V_1 = W_0 \text{ и } W_1 = -V_0 \quad \omega = (1/2 - \nu)(1/2 + \nu)$$

$$V_k = -V_{k-2} \frac{(\omega + k(k-1))(\omega + (k-1)(k-2))}{4k(k-1)}$$

$$W_k = -W_{k-2} \frac{(\omega + k(k-1))(\omega + (k-1)(k-2))}{4k(k-1)}$$

На удаленном от начала координат множестве переменных ряд достаточно хорошо сходится и при стремлении переменной к бесконечности довольно точно описывает асимптотическое поведение решений уравнения Бесселя.

Погрешность вычислений составляет x^{-k-2}

Поэтому при достаточно больших значениях переменной представленное асимптотическое разложение в ряд мало отличается от точного решения уравнения. При достаточно больших значениях переменной функции Бесселя, Неймана и их линейные комбинации могут быть вычислены при помощи асимптотической формулы:

$$z(x) \cong \sum_{k=0}^m x^{-k-1/2} (V_k \sin x + W_k \cos x) \quad (2.10.5)$$

Обозначим степенные ряды как

$$V(x) = \sum_{k=0}^m V_k x^{-k} \quad \text{и} \quad W(x) = \sum_{k=0}^m W_k x^{-k}$$

$$z(x) \cong (V(x) \sin x + W(x) \cos x) x^{-1/2} \quad (2.10.7)$$

Преобразуем полученное отношение в форму, более удобную для изучения асимптотического поведения решений уравнения Бесселя на бесконечности. Разделим правую и левую часть отношения (2.10.7) на выражение:

$$x^{-1/2} \sqrt{V^2(x) + W^2(x)} \quad (2.10.8)$$

Мы получили следующее отношение:

$$\frac{z(x) x^{1/2}}{\sqrt{V^2(x) + W^2(x)}} = \frac{V(x)}{\sqrt{V^2(x) + W^2(x)}} \sin x + \frac{W(x)}{\sqrt{V^2(x) + W^2(x)}} \cos x$$

Видно, что в левой части отношения стоят фактические значения синусов и косинусов. Применим формулы сложения аргументов тригонометрических функций.

$$\cos \psi = \frac{V(x)}{\sqrt{V^2(x) + W^2(x)}} \quad \sin \psi = \frac{W(x)}{\sqrt{V^2(x) + W^2(x)}}$$

$$\text{и введем обозначение } \zeta = \sqrt{V^2(x) + W^2(x)} \quad (2.10.9)$$

Тогда выражение (2.10.7) можно переписать в виде:

$$z(x) x^{1/2} / \zeta = \cos \psi \sin x + \sin \psi \cos x$$

$$z(x) = \sin(x + \psi) \zeta x^{-1/2} \quad (2.10.10)$$

Выразим в явной форме значение ψ :

$$\operatorname{tg} \psi = \sin \psi / \cos \psi = W(x) / V(x)$$

$$\text{Отсюда } \psi = \arctg(W(x) / V(x))$$

И формулу асимптотического разложения для решений уравнения Бесселя на удаленных от начала координат значениях переменной можно выразить следующим образом:

$$z(x) = \zeta x^{-1/2} \sin(x + \arctg(W(x) / V(x)))$$

Еще одна эквивалентная формула асимптотического разложения может быть получена, если мы введем другие эквивалентные отношения:

$$\sin \phi = \frac{V(x)}{\sqrt{V^2(x) + W^2(x)}} \quad \cos \phi = \frac{W(x)}{\sqrt{V^2(x) + W^2(x)}}$$

Тогда выражение (2.10.7) можно переписать в виде:

$$z(x) x^{1/2} / \zeta = \sin \phi \sin x + \cos \phi \cos x$$

$$z(x) = \cos(x - \phi) \zeta x^{-1/2} \quad (2.10.11)$$

И формулу асимптотического разложения можно выразить еще одним эквивалентным образом:

$$z(x) = \zeta x^{-1/2} \cos(x - \arctg(V(x) / W(x)))$$

Утверждение 7. Поведение решений уравнения Бесселя при значениях переменной, удаленных от начала координат, выражается эквивалентными формулами:

$$z(x) \sim \sqrt{V_0^2 + W_0^2} x^{-1/2} \sin(x + \arctg(W_0/V_0))$$

$$z(x) \sim \sqrt{V_0^2 + W_0^2} x^{-1/2} \cos(x - \arctg(W_0/V_0))$$

$$\text{где } z(x) \equiv (V(x)\sin x + W(x)\cos x) x^{-1/2} \quad (2.10.7)$$

$$\text{и } V(x) = \sum_{k=0}^m V_k x^{-k} \quad \text{и} \quad W(x) = \sum_{k=0}^m W_k x^{-k}$$

Доказательство. Доказательство этого утверждения следует из особенностей асимптотического поведения отрицательных степеней у степенных рядов при значениях переменной, удаленных от нуля и стремящихся к бесконечности, которые при этом стремятся к значениям соответствующих нулевых констант.

Утверждение доказано.

Формулы асимптотического поведения любых решений уравнения Бесселя с ограниченным аргументом показывают в явной форме, что при удалении от начала координат эти решения носят колебательный характер с периодом, близким к колебательным тригонометрическим функциям с некоторым сдвигом относительно начала координат. Максимумы и минимумы этой функции при этом стремятся к нулю при возрастании значения переменной.

Например, для небольших значений индекса функций Бесселя, уже при значении переменной $x > 8$ приблизительный интервал между корнями уже равен $\pi \approx 3,14...$

Исследование полученных асимптотических разложений решений уравнения Бесселя с ограниченным индексом (параметром) позволяет предположить наличие бесконечного числа максимумов и минимумов функции и существование бесконечного числа корней этих функций.

Формулы асимптотического разложения позволяют получить приблизительное значение этих корней и экстремумов при удаленных от нуля значениях переменной.

Чем меньше по модулю индекс уравнения Бесселя, тем быстрее и точнее полученные разложения стремятся к точным значениям решения уравнения Бесселя и тем ближе к началу координат можно использовать полученные в настоящем разделе разложения.

Чем больше значение переменной, тем точнее обеспечивается сходимость и тем меньше членов асимптотического разложения можно использовать для достаточно точных практических вычислений.

На практике часто применяют конкретные формулы, которые не содержат никаких произвольных постоянных и обеспечивают вычисления с ошибкой порядка $x^{-5/2}$

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\cos(x-p) - \frac{4\nu^2-1}{8x} \sin(x-p) \right)$$

$$\mathcal{N}_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\sin(x-p) + \frac{4\nu^2-1}{8x} \cos(x-p) \right)$$

$$\text{где } p = \pi(2\nu + 1)/4 \quad (2.10.12)$$

Для сравнения приведем вычисления двух значений переменной для функций Бесселя и Неймана с использованием разложений (2.10.12). Вычисления были проверены на персональном компьютере с использованием встроенной программы микрокалькулятора с расширенными возможностями. В скобках для сравнения указаны значения с более высокой точностью, взятые из таблиц этих функций.

$$J_1(10) \approx 0,0433 \quad (0,0435)$$

$$\mathcal{N}_0(10) \approx 0,0557 \quad (0,0557)$$

$$\mathcal{N}_1(10) \approx 0,2488 \quad (0,2490)$$

Таким образом, мы исследовали возможности получения приближенных значений решений уравнения Бесселя как недалеко от нуля, так и при удаленных от начала координат значениях переменной.

Полученные формулы позволяют проводить вычисления с очень высокой точностью, используя достаточно малое количество членов ряда того или иного разложения.

Задачи построения асимптотических разложений представляют большие сложности, так как при ее решении приходится иметь дело с расходящимися рядами, которые в некоторой области удобны для вычислений и обеспечивают простую оценку погрешности.

При рассмотрении асимптотических разложений решений уравнения Бесселя возникают три различных класса задач в зависимости от поведения индекса и переменной.

Наибольший интерес представляет задача, при которой индекс (параметр) фиксирован, а переменная стремится к бесконечности. Наиболее популярными и удобными в этом случае оказываются разложения, полученные Ганкелем, которые мы приводим здесь без доказательства:

Пусть $p = \pi(2\nu + 1)/4$ при $\nu \ll \infty$ и $x \rightarrow \infty$

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\cos(x-p) \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k (\nu, 2k)}{(2x)^{2k}} - \sin(x-p) \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k (\nu, 2k+1)}{(2x)^{2k+1}} \right) \quad (2.10.13)$$

$$\mathcal{N}_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\sin(x-p) \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k (\nu, 2k)}{(2x)^{2k}} + \cos(x-p) \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k (\nu, 2k+1)}{(2x)^{2k+1}} \right) \quad (2.10.14)$$

$$\text{Где } (\nu, k) = \frac{\Gamma(\nu + k + 1/2)}{k! \Gamma(\nu - k + 1/2)} \quad (2.10.15)$$

Остаточный член разложения для рядов, полученных Ганкелем, имеет тот же порядок, что и первые отбрасываемые члены ряда. Для функций Бесселя и Неймана остаток численно меньше первого отбрасываемого члена ряда и имеет тот же знак.

Если использовать m членов асимптотического разложения Ганкеля и величина $(2x - m - 1/2)$ мала по сравнению с x , то полученный остаток приблизительно равен половине отброшенного члена ряда.

Если в представление функций, которые являются линейными комбинациями функций Бесселя и Неймана и являются решением уравнения Бесселя, подставить асимптотические разложения Ганкеля для функций Бесселя и Неймана (при условии, что эти разложения в данном конкретном случае применимы), то это сразу позволит получить асимптотические разложения для этих функций.

Другие задачи построения асимптотических разложений стоят, когда значения индекса и переменной бесконечно возрастают, но разница между ними остается постоянной, и в случаях, когда отношение переменной и индекса фиксировано при росте значения переменной. Все полученные ранее формулы асимптотических разложений оказываются в этих случаях не применимыми.

$$x \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad x - \nu \cong \text{const} \quad (2.10.16)$$

$$x \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad x/\nu \cong \text{const}$$

Вопросы решения таких асимптотических задач относятся к очень сложным и в этом параграфе не рассматриваются. На практике задачи с подобными условиями встречаются достаточно редко и не относятся к распространенным математическим моделям.

Поэтому перед использованием тех или иных асимптотических разложений задачу необходимо подробно аналитически исследовать и установить отсутствие или наличие «критических» ограничений (2.10.16).

В том случае, когда мы можем использовать асимптотические разложения Ганкеля (2.10.13) и (2.10.14) или подобные им асимптотические разложения с использованием степенных рядов и тригонометрических функций, нужно помнить, что они образуют расходящиеся ряды. Поэтому при достаточно больших значениях индекса их нужно использовать с большой осторожностью.

Вблизи начала координат рекомендуется использовать не асимптотические разложения, а прямое разложение в ряд по степенным функциям. В некоторой «средней» области можно использовать оба типа разложений — сходящиеся степенные ряды и расходящиеся асимптотические разложения и затем сравнить результаты.

§ 11. Приведение дифференциальных уравнений второго порядка к уравнению Бесселя

В настоящем разделе рассматривается вопрос о том, какие дифференциальные уравнения могут быть приведены к уравнению Бесселя. Чрезвычайно заманчивыми для практических исследований являются линейные дифференциальные уравнения второго порядка, явно приводимые к уравнению Бесселя путем некоторой замены с использованием аналитических функций.

Исторически сложилось так, что вопросы приводимости тех или иных дифференциальных уравнений к уравнению Бесселя решались различными математиками в разное время для конкретных изучаемых ими задач и математических моделей. Поэтому аспекты приводимости скорее напоминают сводку тех или иных практически интересных результатов и некоторых обобщений частных случаев, приводимых к тем или иным уравнениям Бесселя. Изложение некоторых критериев проводилось Ломмелем.

К некоторым однородным и неоднородным линейным дифференциальным уравнениям второго порядка могут приводить как математические модели одномерных физических процессов, так и использование метода разделения переменных в уравнениях математической физики с частными производными. Общий вид таких дифференциальных уравнений в большинстве случаев не говорит о том, что они могут или не могут приводиться к хорошо изученному случаю — уравнению Бесселя, и иметь решение, выражающееся через элементарные и цилиндрические функции. Поэтому было произведено обобщение критериев приводимости однородных дифференциальных уравнений второго порядка к уравнению Бесселя.

Будем использовать тот же самый подход, который в самом начале изложения мы применили для приведения классических уравнений Бесселя к уравнению Штурма-Лиувилля, и определим общие критерии приводимости. Рассмотрим общий случай приведения двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Теорема 6. Критерий приводимости. Однородное дифференциальное уравнение второго порядка вида:

$$F_2(x)z''(x) + F_1(x)z'(x) + F_0(x)z(x) = 0 \quad (2.11.1)$$

может быть приведено к другому уравнению вида:

$$u''(x) + Q(x)u'(x) + G(x)u(x) = 0 \quad (2.11.2)$$

с использованием аналитической замены вида:

$$u(x) = \exp\left(\int^x U(\xi) d\xi\right) z(x) \quad (2.11.3)$$

$$\text{где } U(x) = (E(x) - Q(x))/2 \quad (2.11.4)$$

$$E(x) = F_1(x)/F_2(x) \text{ и } H(x) = F_0(x)/F_2(x)$$

если тождественно выполняется условие:

$$U'(x) + U^2(x) + Q(x)U(x) = H(x) - G(x) \quad (2.11.5)$$

Доказательство. Уравнение Бесселя является частным случаем более общего рассматриваемого случая.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (2.11.1). Разделив его правую часть на невырожденный потенциал при второй производной, сведем это уравнение к более удобному для дальнейшего рассмотрения виду:

$$z''(x) + E(x)z'(x) + H(x)z(x) = 0 \quad (2.11.6)$$

Предположим, что аналитическая замена, связывающая решения уравнения (2.11.6) и уравнения (2.11.2), существует и может быть представлена в виде:

$$u(x) = A(x)z(x) \quad (2.11.7)$$

Подставим замену в уравнение (2.11.2) и получим следующее выражение:

$$0 = A(x)z''(x) + 2A'(x)z'(x) + A''(x)z(x) + Q(x)(A'(x)z(x) + A(x)z'(x)) + G(x)A(x)z(x)$$

Умножим уравнение (2.11.6) на $P(x)$

$$0 = A(x)z''(x) + E(x)A(x)z'(x) + H(x)A(x)z(x)$$

Тождественное равенство полученных уравнений обеспечивается тождественным равенством потенциалов при каждой производной:

$$\begin{cases} z''(x) & A(x) = A(x) \\ z'(x) & E(x)A(x) = 2A'(x) + Q(x)A(x) \\ z(x) & H(x)A(x) = A''(x) + Q(x)A'(x) + G(x)A(x) \end{cases} \quad (2.11.8)$$

Элементарное дифференциальное уравнение первого порядка при первой производной функции позволяет сразу записать общее представление для замены.

$$A'(x)/A(x) = (E(x) - Q(x))/2 \quad (2.11.9)$$

Формально проинтегрировав полученное выражение и введя для удобства новое обозначение (2.11.4), мы получим потенциал для общего вида замены (2.11.3):

$$A(x) = \exp \int^x (E(\xi) - Q(\xi))/2 d\xi = \exp \int^x U(\xi) d\xi$$

Полученное из (2.11.8) тождество при нулевой производной функции позволяет точно описать условия и получить четкие критерии, при которых преобразование одного дифференциального уравнения второго порядка в другое возможно. Воспользуемся тем, что

$$A'(x) = U(x)A(x) \text{ и } A''(x) = (U'(x) + U^2(x))A(x)$$

Подставим значение потенциала замены (2.11.4) и его производных во второе уравнение и далее упростим:

$$H(x) = U'(x) + U^2(x) + Q(x)U(x) + G(x)$$

Таким образом, мы получили необходимые условия существования замены. Во всех рассуждениях мы полагали, что все необходимые производные и интегралы существуют. Доказательство этого должно производиться для каждого конкретного случая рассматриваемых на практике уравнений. *Теорема доказана.*

Следствие 1. Классическое уравнение Бесселя

$$x^2 z''(x) + x z'(x) + (x^2 - \nu^2) z(x) = 0 \quad (2.11)$$

приводится к уравнению Штурма-Лиувилля вида

$$y''(x) - \frac{(\nu - 1/2)(\nu + 1/2)}{x^2} y(x) = -y(x) \quad (2.15)$$

при помощи замены: $y(x) = x^{1/2} z(x)$

Доказательство. В теореме 6 операции проводятся над некоторыми абстрактными функциями. В конкретных приложениях могут быть известны некоторые потенциалы одного или двух дифференциальных уравнений. Для рассматриваемого случая нам известны значения следующих потенциалов (в обозначениях теоремы 6):

$$Q(x) = 0 \text{ в уравнении (2.15) Штурма-Лиувилля}$$

$$E(x) = 1/x \text{ и } H(x) = (x^2 - \nu^2)/x^2 \text{ для (2.11)}$$

Потенциал и общий вид замены в соответствии с отношениями (2.11.3) и (2.11.4) можно получить по формуле:

$$U(x) = (E(x) - Q(x))/2 = 1/2x$$

$$y(x) = \exp\left(\int^x U(\xi) d\xi\right) z(x) = x^{1/2} z(x)$$

Установим значение потенциала при нулевой производной для уравнения Штурма-Лиувилля, воспользовавшись отношением (2.11.5) теоремы 6.

$$U'(x) + U^2(x) + Q(x)U(x) = H(x) - G(x) \quad (2.11.5)$$

$$\text{для уравнения } y''(x) + G(x)y(x) = 0$$

$$\text{Отсюда } G(x) = -U'(x) - U^2(x) - Q(x)U(x) + H(x)$$

$$\text{или } G(x) = 1 - (\nu - 1/2)(\nu + 1/2)/x^2$$

Таким образом, доказано существование замены между двумя рассматриваемыми уравнениями. *Следствие доказано.*

Следствие 2. К классическому уравнению Бесселя

$$x^2 z''(x) + x z'(x) + (x^2 - \nu^2) z(x) = 0 \quad (2.11.1)$$

приводится дифференциальное уравнения вида

$$u''(x) + Q(x)u'(x) + G(x)u(x) = 0 \quad (2.11.2)$$

с использованием аналитической замены вида:

$$u(x) = \exp\left(\int^x U(\xi) d\xi\right) z(x) \quad (2.11.10)$$

$$\text{где } U(x) = (1/x - Q(x))/2 \quad (2.11.11)$$

и существует такая константа $\nu \geq 0$ (индекс),
что тождественно выполняется условие: $(2.11.12)$

$$U'(x) + U^2(x) + Q(x)U(x) = (1 - \nu^2/x^2) - G(x)$$

Для получения этого следствия мы заменили абстрактное уравнение (2.11.1) на конкретное классическое уравнение Бесселя в обозначениях теоремы 6.

Следствие 2 предоставляет критерии, по которым осуществляется проверка критериев приводимости некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка (2.11.2) к уравнению Бесселя. Необходимо получить потенциал (2.11.11), подставить в условия (2.11.12) этот потенциал и потенциалы проверяемого уравнения (2.11.2). Если удастся подобрать такую константу ν , при которой условия (2.11.12) выполняются тождественно, это означает, что проверяемое уравнение можно сразу привести к уравнению Бесселя при помощи аналитической замены.

Следствие 3. Если два дифференциальных уравнения можно привести к одному и тому же третьему дифференциальному уравнению, используя приведения теоремы 6, это означает, что эти два уравнения можно привести друг к другу и замена (2.11.3) существует.

Доказательство является естественным следствием линейности критерия (2.11.5) и других свойств используемых в теореме 6 преобразований. В некоторых случаях использование этого следствия может оказаться удобным.

В общем случае, являющимся естественным следствием теоремы 6, можно сформулировать следующее положение. Если для двух дифференциальных уравнений вида (2.11.2) и (2.11.6) существует пара таких замен, которые позволяют привести эти два дифференциальных уравнения к одному и тому же однородному дифференциальному уравнению второго порядка, это значит, что два уравнения могут быть приведены друг к другу с использованием замены теоремы 6. Этот критерий может облегчить исследование некоторых классов дифференциальных уравнений.

Следствие 4. Любое невырожденное однородное дифференциальное уравнение второго порядка вида:

$$u''(x) + Q(x)u'(x) + G(x)u(x) = 0 \quad (2.11.2)$$

может быть приведено к уравнению вида:

$$\varphi''(x) + q(x)\varphi(x) = 0 \quad (2.11.13)$$

при помощи замены вида:

$$u(x) = \exp\left(-\int^x Q(\xi)/2 d\xi\right) \varphi(x) \quad (2.11.14)$$

$$\text{где } q(x) = G(x) - Q'(x)/2 - Q^2(x)/4 \quad (2.11.15)$$

Условие настоящей леммы является частным случаем теоремы 6. Любое невырожденное однородное дифференциальное уравнение второго порядка может быть единственным образом приведено к уравнению с нулевым потенциалом при первой производной с точностью до константы (в силу однородности).

При построении рекуррентных отношений и асимптотических представлений мы воспользовались приведением уравнения Бесселя к некоторому уравнению вида (2.11.13) с нулевым потенциалом при первой производной и потенциалом

$$q(x) = (1/4 - \nu^2 + x^2)/x^2 \quad (2.11.16)$$

Если однородное дифференциальное уравнение также может быть приведено к этому же самому уравнению, это означает, что оно приводимо и к уравнению Бесселя.

В ряде практических приложений приведения двух уравнений теоремы 6 может оказаться недостаточно. Очень популярным и практичным методом является метод замены переменных в том уравнении, решение которого заранее известно (для получения более сложных решений) или в уравнении, которое нужно привести к более тривиальному и очевидному.

Теорема 7. Замена переменных. Однородное дифференциальное уравнение второго порядка вида:

$$z''(x) + E(x)z'(x) + H(x)z(x) = 0 \quad (2.11.6)$$

может быть приведено к уравнению вида:

$$\omega''(\zeta) + P(\zeta)\omega'(\zeta) + S(\zeta)\omega(\zeta) = 0 \quad (2.11.2)$$

при помощи замены переменных вида:

$$x = \psi(\zeta) \quad z(x) = z(\psi(\zeta)) = \omega(\zeta) \quad (2.11.17)$$

$$P(\zeta) = E(\psi(\zeta))\psi'(\zeta) - \psi''(\zeta)/\psi'(\zeta) \quad (2.11.18)$$

$$S(\zeta) = H(\psi(\zeta))(\psi'(\zeta))^2 \quad (2.11.19)$$

Доказательство. Поэтапно выполним замену переменных и расчет новых дифференциалов, после чего подставим полученные данные во второе уравнение и получим значение потенциалов.

$$\begin{aligned} z(x) &= z(\psi(\zeta)) = \omega(\zeta) \\ z'(x) &= \frac{dz(x)}{dx} = \frac{d\zeta}{dx} \frac{dz(\psi(\zeta))}{d\zeta} = \frac{\omega'(\zeta)}{\psi'(\zeta)} \\ z''(x) &= \frac{dz'(x)}{dx} = \frac{d\zeta}{dx} \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\omega'(\zeta)}{\psi'(\zeta)} \right) = \\ &= \frac{\omega''(\zeta)\psi'(\zeta) - \omega'(\zeta)\psi''(\zeta)}{(\psi'(\zeta))^3} \end{aligned}$$

Подставим полученные отношения в уравнение (2.11.6).

Теорема доказана.

Предупреждение. При использовании теоремы 7 о замене переменных и ее формул необходимо помнить, что перед проведением каких-либо вычислений пара дифференциальных уравнения приводятся к следующему виду — потенциал при второй производной в двух уравнениях должен быть равен тождественной единице.

Отдельный интерес представляет подробное рассмотрение классического уравнения Бесселя, для которого потенциалы принимают такие значения:

$$E(x) = 1/x \quad \text{и} \quad H(x) = (x^2 - \nu^2)/x^2$$

Следствие 1. Дифференциальное уравнение вида

$$\zeta^2 \omega''(\zeta) + \zeta \omega'(\zeta) + (a^2 \zeta^2 - \nu^2) \omega(\zeta) = 0 \quad (2.11.20)$$

может быть приведено к классическому уравнению Бесселя с использованием замены переменных:

$$x^2 z''(x) + x z'(x) + (x^2 - \nu^2) z(x) = 0 \quad (2.1.1)$$

$x = a\zeta$ где a — некоторая действительная, чисто мнимая или комплексная константа и функция

$$\omega(\zeta) = z(a\zeta) \quad \text{— решение уравнения (2.11.20).}$$

Доказательство этого простого утверждения проводится подстановкой рассматриваемой линейной замены в уравнение Бесселя (2.1.1) или пользуясь теоремой 7.

При использовании действительной константы волновые свойства фундаментальных решений уравнения Бесселя сохраняются, при использовании чисто мнимой константы — исчезают, фундаментальные решения модифицированного уравнения Бесселя существуют, имеют действительные значения и являются монотонными.

Следствие 1 является достаточно распространенным и удобным в рассмотрении, всегда приводимом к уравнению Бесселя частным случаем теоремы 7.

Наиболее распространенным методом практического приведения уравнений одного вида к уравнению другого вида — в частности, приведения к классическому уравнению Бесселя, является комбинация двух методов — метода приведения для базового уравнения и метода замены переменных для уравнения Бесселя.

Цель такого исследования — получить решение некоторого уравнения с использованием фундаментальных решений уравнения Бесселя — функций Бесселя, Неймана и других хорошо изученных частных решений.

Приведение к решению, выраженному при помощи фундаментальных решений уравнения Бесселя, осуществляется в два этапа — через переход к другому уравнению и замену переменных. Заметим, что если замена переменных, которую нужно произвести, слишком сложная и неочевидная, то практическая ценность такого приведения к уравнению Бесселя или иному уравнению невелика.

Обычно в задачах о приведении одного дифференциального уравнения к другому известны все потенциалы уравнений — как исходного, так и желаемого результирующего (возможно, с точностью до числовых коэффициентов, входящих в потенциалы). Наиболее сложным является определение общего вида функций, входящих в отношение замены, приводящей одно уравнение к другому.

Приведем пример, каким образом можно комбинировать применение выводов теоремы 6 и 7.

Самым простым случаем приведения, рассматриваемым в литературе, является дифференциальное уравнение вида:

$$u''(x) - c^2 u(x) = u(x) (p(p+1)/x^2) \quad (2.11.21)$$

где c, p — некоторые константы.

В обозначениях теоремы 6, которая применяется на первом этапе, потенциалы уравнения (2.11.2) имеют вид:

$$Q(x) = 0 \text{ и } G(x) = -c^2 - p(p+1)/x^2 \quad (2.11.22)$$

$$\text{Отсюда } U(x) = 1/2x \text{ и } u(x) = x^{1/2} z(x)$$

Не применяя второе условие теоремы 6, сразу рассмотрим полученное уравнение и применим теорему 7 о замене переменных к промежуточному результату. Подставим замену переменных в полученное уравнение:

$$x^2 z''(x) + x z'(x) - (c^2 x^2 + (p+1/2)^2) z(x) = 0$$

или перепишем его, введя мнимую единицу:

$$x^2 z''(x) + x z'(x) + ((ci)^2 x^2 - (p+1/2)^2) z(x) = 0$$

Данное уравнение не является классическим уравнением Бесселя, но очень близко к нему. Если произвести линейную замену переменных, используя комплексные числа и мнимую единицу, обозначив новую переменную

$$\chi = icx \text{ и положив } \nu = p + 1/2$$

мы получим классическое уравнение Бесселя.

Общее решение уравнения (2.11.21) имеет вид:

$$u(x) = x^{1/2} Z_\nu(icx) \text{ где } \nu = p + 1/2 \quad (2.11.23)$$

На рассмотренном примере было показано, что для приведения некоторого уравнения к уравнению Бесселя использование одних формул теоремы 6 и следствия 2 может оказаться недостаточным. Но теорема 6 и следствие 2 позволяет сразу получить общий вид замены, которая может оказаться неочевидной.

Замена (2.11.10) может привести рассматриваемое уравнение (2.11.2) к уравнению Бесселя (достаточное условие), но не обеспечивает необходимые условия существования такого перехода (она описывает только один из возможных критериев). Однако в некоторых случаях замена (2.11.10) обеспечивает переход к уравнению, которое методом замены переменных приводится к классическому уравнению Бесселя, решение которого может быть выражено через цилиндрические функции.

В рассмотренном примере (2.11.21) был сделан переход от действительного переменного к чисто мнимому. Такие цилиндрические функции рассматривались ранее в соответствующих разделах. Было установлено, что эти функции имеют действительное значение при чисто мнимых значениях переменной и не проявляют никаких волновых свойств. Они ведут себя особым образом.

В качестве еще одного примера приведения дифференциальных уравнений к уравнению Бесселя рассмотрим уравнения, которые подробно изучались Ломмелем.

Ломмелем был получен общий класс уравнений, решения которого могут быть выражены через функции Бесселя, в качестве параметров которых используются некоторые другие функции. Решение было получено в два этапа с использованием замены переменных в некотором уравнении, которое было приведено к уравнению Бесселя и решение которого выражается через функции Бесселя.

Ломмель показал, что общим решением класса дифференциальных уравнений

$$u''(x) + Q(x)u'(x) + G(x)u(x) = 0 \quad (2.11.24)$$

где $Q(x) = (2\alpha - 2\beta\nu + 1)/x$

и $G(x) = (\beta^2\gamma^2x^{2\beta} + \alpha(\alpha - 2\beta\nu))/x^2$

будет $u(x) = x^{\beta\nu - \alpha} Z_\nu(\gamma x^\beta)$

В приведенном примере Ломмелем был произведен не только переход от одного дифференциального уравнения к другому, но и выполнена аналитическая замена переменных в уравнении Бесселя. Ломмелем был исследован целый класс уравнений со сложными потенциалами, приводимых к уравнению Бесселя.

Ломмелю принадлежат подробные результаты исследований, описывающие некоторый общий класс дифференциальных уравнений.

Он установил, что если $Z_\nu(x)$ — некоторое решение уравнения Бесселя, то следующая функция:

$$u(x) = \chi(x) (\psi(x))^v Z_\nu(\psi(x)) \quad (2.11.25)$$

является решением уравнения вида

$$u''(x) + Q(x)u'(x) + G(x)u(x) = 0 \quad (2.11.26)$$

$$Q(x) = -(\psi''(x)/\psi'(x) + (2\nu - 1)\psi'(x)/\psi(x) + 2\chi'(x)/\chi(x))$$

$$G(x) = (\psi''(x)/\psi'(x) + (2\nu - 1)\psi'(x)/\psi(x) + 2\chi'(x)/\chi(x)) \chi'(x)/\chi(x) - \chi''(x)/\chi(x) + (\psi'(x))^2$$

Ломмель изучил любопытный частный случай приведения узкого, но практически очень часто применяемого класса дифференциальных уравнений второго порядка, приводимых к уравнению Бесселя. Вывод этих сложных формул достаточно очевиден.

Для того, чтобы получить эти обобщенные уравнения, Ломмель рассмотрел более простое уравнение вида:

$$\omega''(\psi) - 2p\omega'(\psi)/\psi - c^2\omega(\psi) = 0 \quad (2.11.27)$$

его решение: $\omega(\psi) = \psi^{p+1/2} Z_{p+1/2}(ic\psi)$

$2p = 2\nu - 1$ — значение индекса

$\omega = u(\psi)/\chi(\psi)$ и $\psi = \psi(x)$ — используемые замены.

Прямой подстановкой приводимых замен были получены обобщенные формулы Ломмеля (2.11.25) и (2.11.26).

Основная сложность этой задачи состоит в том, чтобы определить, удовлетворяет ли некоторое рассматриваемое дифференциальное уравнение условиям Ломмеля и может ли оно быть приведено к уравнению Бесселя при помощи замены (2.11.25), когда ни общий вид функций (2.11.26), ни значение индекса ν для него неизвестны.

На сегодняшний день это наиболее полный и практически интересный результат приведения уравнения Бесселя к некоторому классу дифференциальных уравнений. Существуют таблицы приведенных функций и замен.

Преобразование Ломмеля позволяет при помощи удобных для практического применения функций представить достаточно широкий класс решений практических задач с использованием функций Бесселя.

Однако можно легко заметить, что преобразование Ломмеля является частным случаем обобщенных теорем, которые были получены автором при исследовании линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Исследование возможности приведения некоторого дифференциального уравнения второго порядка к уравнению Бесселя проводится с двух сторон, используя промежуточное (буферное) дифференциальное уравнение:

— используется замена переменных и теорема 7 для приведения уравнения Бесселя к некоторому уравнению, решение которого выражается через функции Бесселя;

— применяется теорема 6, приводящая полученное промежуточное уравнение к тому уравнению, исследование которого мы производим, и оцениваются критерии существования такой замены.

Рассмотрение уравнений Ломмеля и других подобных частных случаев линейных дифференциальных уравнений второго порядка демонстрирует основной подход, который доминирует при исследовании вопросов приводимости.

Многие исследователи-математики сталкиваются в своей практической работе построения математических моделей физических процессов с уравнениями Бесселя и изучают классы уравнений, к которым приводятся уравнения Бесселя с использованием преобразований двух типов — замены переменных в уравнении Бесселя и возможного дальнейшего приведения полученного дифференциального уравнения к некоторому другому типу.

Классическим примером являются уравнения Ломмеля и большие сводные таблицы уравнений — частных случаев преобразований Ломмеля для конкретных функций замены переменных. Приведем несколько примеров:

$$u''(x) + \frac{a}{x} u'(x) + (b^2 \exp(2cx) - d^2 + \frac{a(a-2)}{4x^2}) u(x) = 0$$

$$\text{Решение } u(x) = x^{-a/2} Z_{d/c}(b \exp(cx)/c)$$

$$u''(x) + \frac{2b}{2bx+c} u'(x) + \frac{b^2}{2bx+c} (1 - \frac{p^2}{2bx+c}) u(x) = 0$$

$$\text{Решение } u(x) = Z_p((2bx+c)^{1/2}) \quad \text{и др.}$$

Однако на практике исследователи часто сталкиваются с некоторыми дифференциальными уравнениями второго порядка с явными значениями коэффициентов, и основной сложностью является вопрос, существует ли замена достаточно простого вида, которая позволяет привести решение этого уравнения к уравнению Бесселя, используя функции Бесселя и элементарные функции. Займемся более подробным и детальным изучением этой обратной задачи, воспользовавшись результатами теорем 6 и 7.

Утверждение 8. Классическое уравнение Бесселя

$$x^2 z''(x) + x z'(x) + (x^2 - \nu^2) z(x) = 0 \quad (2.1.1)$$

может быть приведено к уравнению вида:

$$\omega''(\zeta) + P(\zeta) \omega'(\zeta) + S(\zeta) \omega(\zeta) = 0 \quad (2.1.1.27)$$

при помощи замены переменных вида:

$$x = \psi(\zeta) \quad \omega(\zeta) = z(\psi(\zeta)) \quad (2.1.1.17)$$

$$P(\zeta) = \psi'(\zeta)/\psi(\zeta) - \psi''(\zeta)/\psi'(\zeta) \quad (2.1.1.28)$$

$$S(\zeta) = (1 - \nu^2/\psi(\zeta)^2) \psi'(\zeta)^2 \quad (2.1.1.29)$$

Для доказательства утверждения 8 достаточно положить в теореме 7 значения потенциалов:

$$E(x) = 1/x \quad \text{и} \quad H(x) = (x^2 - \nu^2)/x^2$$

Если нам нужно проверить, приводится ли произвольное уравнение (2.1.1.27) к уравнению Бесселя методом замены переменных, мы должны установить существование некоторой замены (2.1.1.17) и выполнение условий (2.1.1.28):

$$P(\zeta) = \psi'(\zeta)/\psi(\zeta) - \psi''(\zeta)/\psi'(\zeta) \quad (2.1.1.28)$$

Преобразуем обе части полученного уравнения:

$$dP(\zeta) = \frac{d\psi(\zeta)}{\psi(\zeta)} - \frac{d\psi'(\zeta)}{\psi'(\zeta)}$$

Формально проинтегрируем полученное уравнение:

$$\psi'(\zeta)/\psi(\zeta) = \exp\left(-\int_{\zeta}^{\zeta} P(\eta) d\eta\right)$$

Если для удобства мы введем функцию $\varphi(\zeta)$:

$$\varphi(\zeta) = \exp\left(-\int_{\zeta}^{\zeta} P(\eta) d\eta\right) \quad (2.1.1.30)$$

$$P(\zeta) = -\varphi'(\zeta)/\varphi(\zeta)$$

тогда можно записать $\psi'(\zeta)/\psi(\zeta) = \varphi(\zeta)$

Отсюда с учетом константы можно выразить:

$$\psi(\zeta) = c \exp\left(\int^{\zeta} \varphi(\xi) d\xi\right) \quad \text{или подробнее}$$

$$\psi(\zeta) = c \exp\left(\int^{\zeta} \left(\exp\left(-\int^{\xi} P(\eta) d\eta\right)\right) d\xi\right) \quad (2.11.31)$$

Таким образом, дважды проинтегрировав и применив экспоненту к потенциалу, стоящему при первой производной исходного уравнения, мы найдем явный вид замены, которая может привести к уравнению Бесселя. Полученное условие (2.11.31) является необходимым, но не достаточным.

Очевидно, что для любой формально интегрируемой функции потенциала можно вычислить значение (2.11.31) и получить некоторую замену переменных. Проверим соответствие потенциала при нулевой производной:

$$S(\zeta) = (1 - \nu^2 / \psi(\zeta)^2) \psi'(\zeta)^2 \quad (2.11.29)$$

$$S(\zeta) = \psi'(\zeta)^2 - \nu^2 (\psi'(\zeta) / \psi(\zeta))^2$$

$$S(\zeta) = \psi'(\zeta)^2 - \nu^2 \varphi(\zeta)^2 \quad (2.11.32)$$

Если можно подобрать такое значение индекса, при котором отношение (2.11.32) будет выполняться тождественно, то некоторое уравнение (2.11.27) может быть приведено к уравнению Бесселя методом замены переменных.

Утверждение 9. *Некоторое уравнение вида*

$$\omega''(\zeta) + P(\zeta)\omega'(\zeta) + S(\zeta)\omega(\zeta) = 0 \quad (2.11.27)$$

может быть приведено к уравнению Бесселя:

$$x^2 z''(x) + x z'(x) + (x^2 - \nu^2) z(x) = 0 \quad (2.11)$$

при помощи замены переменных вида:

$$x = \psi(\zeta) \quad \omega(\zeta) = z(\psi(\zeta)) \quad (2.11.17)$$

$$\psi(\zeta) = c \exp\left(\int^{\zeta} \left(\exp\left(-\int^{\xi} P(\eta) d\eta\right)\right) d\xi\right) \quad (2.11.31)$$

если выполняется тождество:

$$S(\zeta) = \psi'(\zeta)^2 - \nu^2 (\psi'(\zeta) / \psi(\zeta))^2 \quad (2.11.29)$$

для некоторых констант ν и c , которые могут быть получены методом неопределенных коэффициентов, явной подстановкой или иным методом.

Примечание. Неопределенная константа c возникает благодаря формальному интегрированию и общему виду потенциала (2.11.28), который может быть явно выражен через функцию замены. Константа может быть равной единице или принимать другое ненулевое значение.

Если мы положим потенциал $P(\zeta) = 1/\zeta$ тогда замена (2.11.31) будет иметь общий вид:

$$x = \psi(\zeta) = c\zeta \quad \text{где } c \text{ — некоторая константа.}$$

Для существования приведения методом замены переменных необходимо дополнительно потребовать выполнение критерия приводимости (2.11.29):

$$S(\zeta) = c^2 - \nu^2 / \zeta^2 \quad \text{— общий вид потенциала.}$$

Полученные выводы полностью совпадают с результатами следствия 1 теоремы 7. Мы доказали, при каких условиях возможно приведение к уравнению Бесселя уравнения с одним конкретно заданным потенциалом и какой вид должен иметь второй потенциал этого уравнения.

Подведем промежуточные итоги. Мы получили критерии — теорему 6 и теорему 7, которые двумя различными способами позволяют выполнять приведение одних линейных дифференциальных уравнений второго порядка к другим дифференциальным уравнениям того же типа.

Когда мы исследуем возможность приведения одного уравнения к другому, вначале мы должны попытаться отдельно применить теорему 8 и отдельно — теорему 7. В некоторых случаях использование этих теорем уже позволяет получить удовлетворительный результат.

Частным случаем является вопрос приведения уравнений к уравнению Бесселя. Для этого можно воспользоваться частными случаями — следствием 2 теоремы 6 и следствиями теоремы 6 — утверждениями 8 и 9.

Для того, чтобы получить более сложные способы приведения двух уравнений, будем последовательно применять теорему 6 и теорему 7, используя третье дифференциальное уравнение в качестве «посредника» между двумя исследуемыми уравнениями.

Пусть нам известно решение уравнения:

$$z''(x) + E(x)z'(x) + H(x)z(x) = 0 \quad (2.11.6)$$

Исследуем возможность комбинированного приведения к нему другого уравнения вида:

$$u''(\zeta) + V(\zeta)u'(\zeta) + K(\zeta)u(\zeta) = 0 \quad (2.11.33)$$

В качестве «посредника» рассмотрим уравнение:

$$\omega''(\zeta) + P(\zeta)\omega'(\zeta) + S(\zeta)\omega(\zeta) = 0 \quad (2.11.27)$$

Нам известны потенциалы $E(x)$, $H(x)$ и некоторое общее решение $z(x)$ уравнения (2.11.33). Потенциалы уравнения-«посредника» заранее неизвестны. Нужно выразить решение $u(\zeta)$ уравнения (2.11.33) через x и $z(x)$ и оценить критерии существования такой замены.

Необходимым условием приведения уравнения (2.11.33) к некоторому уравнению-«посреднику» (2.11.27)

$$u''(\zeta) + V(\zeta)u'(\zeta) + K(\zeta)u(\zeta) = 0 \quad (2.11.33)$$

$$\omega''(\zeta) + P(\zeta)\omega'(\zeta) + S(\zeta)\omega(\zeta) = 0 \quad (2.11.27)$$

согласно условиям теоремы 6 является замена вида:

$$\omega(\zeta) = \exp\left(\int_{\zeta} U(\xi) d\xi\right) u(\zeta) \quad (2.11.34)$$

где $U(\zeta) = (V(\zeta) - P(\zeta))/2$

Необходимым условием приведения другого уравнения (2.11.6) к некоторому уравнению-«посреднику» (2.11.27)

$$z''(x) + E(x)z'(x) + H(x)z(x) = 0 \quad (2.11.6)$$

$$\omega''(\zeta) + P(\zeta)\omega'(\zeta) + S(\zeta)\omega(\zeta) = 0 \quad (2.11.27)$$

согласно условиям теоремы 7 является замена вида:

$$x = \psi(\zeta) \quad z(x) = z(\psi(\zeta)) = \omega(\zeta) \quad (2.11.17)$$

$$P(\zeta) = E(\psi(\zeta))\psi'(\zeta) - \psi''(\zeta)/\psi'(\zeta) \quad (2.11.18)$$

$$S(\zeta) = H(\psi(\zeta))(\psi'(\zeta))^2 \quad (2.11.19)$$

Можно заметить, что в данных рассуждениях необходимые условия приведения уравнений друг к другу являются потенциалы при первых производных двух рассматриваемых уравнений и возможность существования между ними зависимости.

Подставив в уравнение (2.11.18) явное значение известного потенциала $E(x)$, мы получим дифференциальное уравнение, явно связывающее $\psi(\zeta)$ и $P(\zeta)$.

Для того, чтобы между потенциалами $P(\zeta)$ и $V(\xi)$ существовала зависимость, тождественно должен выполняться критерий теоремы 6:

$$U'(\zeta) + U^2(\zeta) + P(\zeta)U(\zeta) = K(\zeta) - S(\zeta) \quad (2.11.34)$$

Исследование достаточных условий обеспечивается потенциалами при нулевых производных функций.

Если исследователю удастся найти решение полученной системы уравнений, связывающую потенциалы двух известных уравнений между собой, найти неизвестную функцию замены переменных, и это общее решение будет представлено через элементарные функции, то задачу приведения двух уравнений друг к другу можно считать решенной.

Общий вид полученной системы дифференциальных уравнений может натолкнуть исследователя на мысли, какого типа функции можно использовать для взаимных преобразований и далее наложить условия, применив метод неопределенных коэффициентов или другой.

Решением уравнения (2.11.27) является функция:

$$\omega(\zeta) = z(\psi(\zeta)), \text{ где функция } z(x) \text{ известна.}$$

Решением уравнения (2.11.33) является функция:

$$u(\zeta) = \exp\left(-\int_{\zeta} U(\xi) d\xi\right) z(\psi(\zeta)) \quad (2.11.35)$$

Последовательное выполнение двух рассмотренных преобразований дает зависимость общего вида:

$$u(x) = A(x)z(\psi(x)) \quad (2.11.36)$$

где $\psi(x)$ и $A(x)$ — неизвестные функции

для некоторой пары дифференциальных уравнений:

$$z''(x) + E(x)z'(x) + H(x)z(x) = 0 \quad (2.11.6)$$

$$u''(x) + V(x)u'(x) + K(x)u(x) = 0 \quad (2.11.33)$$

$z(x)$ — известное решение некоторого уравнения.

Если в предыдущем рассмотрении мы поменяем очередность применения теорем 6 и 7, мы получим некоторую зависимость общего вида, получаемую в два этапа:

$$u(x) = B(\psi(x))z(\psi(x)) \quad (2.11.37)$$

Наиболее сложным, но практически еще осуществимым способом приведения дифференциальных уравнений друг к другу является использование двух уравнений-посредников. Каждое из рассматриваемых уравнений вначале приводится к некоторой паре дифференциальных уравнений при помощи теоремы 6, и уже потом между ними устанавливается зависимость методом замены переменных по теореме 7.

Мы получим систему из пяти дифференциальных уравнений с пятью неизвестными функциями. Если система решается в элементарных функциях — задачу приведения дифференциальных уравнений можно считать решенной.

$$u(x) = A(x)B(\psi(x))z(\psi(x)) \quad (2.11.38)$$

Примечание. Если применять теоремы 6 и 7, используя метод математической индукции, эти теоремы нужно чередовать друг с другом. Последовательное использование условий одной и той же теоремы часто не имеет смысла.

Исключением является приведение к дифференциальному уравнению с нулевым потенциалом при первой производной, так как к нему единственным образом приводится любое дифференциальное уравнение рассматриваемого типа. В других случаях дополнительные приведения не оправданы с практической точки зрения.

Перейдем от абстрактных рассуждений, целью которых является проведение общей систематизации вопросов приведения уравнений, к рассмотрению конкретного уравнения Бесселя и приводимых к нему других неочевидных дифференциальных уравнений. Рассмотрим частный случай.

Лемма 4. Дифференциальное уравнение вида:

$$y''(x) + g(x)y(x) = 0 \quad (2.11.39)$$

может быть приведено к уравнению Бесселя

$$z''(x) + E(x)z'(x) + H(x)z(x) = 0 \quad (2.11.6)$$

$$E(x) = 1/x \quad \text{и} \quad H(x) = (x^2 - \nu^2)/x^2$$

при помощи обобщенной замены вида:

$$y(x) = \exp\left(\int^x P(\xi)/2 \, d\xi\right) z(\psi(x)) \quad (2.11.40)$$

$$\text{где } P(x) = \psi'(x)/\psi(x) - \psi''(x)/\psi'(x)$$

если существует функция $\psi(x)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$g(x) = \psi'(x)^2 + \left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right)^2 \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right) - \frac{3}{4} \left(\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)}\right)^2 + \frac{\psi'''(x)}{2\psi'(x)} \quad (2.11.41)$$

Практическое значение лемма 4 имеет только в том случае, если функция $\psi(x)$ существует, может быть выражена через элементарные функции и имеет достаточно простой вид. Если простое решение $\psi(x)$ существует, на практике оно может быть получено методом неопределенных коэффициентов.

Примечание. Чтобы сделать задачу поиска решений реальной и исключить один потенциал при первой производной, мы привели исследуемое на приводимость уравнение к виду (2.11.39) на основании следствия 4 теоремы 6.

Доказательство. Применим замену переменных к уравнению Бесселя и далее приведем полученное уравнение к некоторому уравнению с нулевым потенциалом при первой производной. Любые дифференциальные уравнения рассматриваемого типа могут быть приведены к уравнению Штурма-Лиувилля единственным образом. Приравняв друг другу потенциалы в этом уравнении, мы получим критерий приводимости двух дифференциальных уравнений.

Некоторое дифференциальное уравнение вида

$$\omega''(\zeta) + P(\zeta)\omega'(\zeta) + S(\zeta)\omega(\zeta) = 0 \quad (2.11.27)$$

приводится к уравнению Бесселя при помощи замены переменных при условии:

$$x = \psi(\zeta) \quad \omega(\zeta) = z(\psi(\zeta)) \quad (2.11.17)$$

$$P(\zeta) = \psi'(\zeta)/\psi(\zeta) - \psi''(\zeta)/\psi'(\zeta) \quad (2.11.28)$$

$$S(\zeta) = \psi'(\zeta)^2 (1 - \nu^2 / \psi(\zeta)^2) \quad (2.11.29)$$

Полученное уравнение (2.11.27) приводится к уравнению Штурма-Лиувилля при помощи следующей замены:

$$y''(\zeta) + q(\zeta)y(\zeta) = 0 \quad (2.11.39)$$

$$y(\zeta) = \exp\left(\int_{\zeta} P(\xi)/2 \, d\xi\right) \omega(\zeta)$$

$$\text{где } g(\zeta) = S(\zeta) - P'(\zeta)/2 - P^2(\zeta)/4 \quad (2.11.40)$$

Подставив значения потенциалов, выраженных через функцию замены (2.11.28) и (2.11.29), в результирующее уравнение (2.11.40) и упростив, мы получим дифференциальное уравнение — критерий приводимости и существование замены рассматриваемого типа. *Лемма доказана.*

Теорема 8. Дифференциальное уравнение вида:

$$u''(x) + V(x)u'(x) + K(x)u(x) = 0 \quad (2.11.33)$$

может быть приведено к уравнению Бесселя

$$z''(x) + E(x)z'(x) + H(x)z(x) = 0 \quad (2.11.6)$$

$$E(x) = 1/x \quad \text{и} \quad H(x) = (x^2 - \nu^2)/x^2$$

при помощи обобщенной замены вида: (2.11.41)

$$u(x) = \exp\left(\int_0^x (P(\xi) - V(x))/2 \, d\xi\right) z(\psi(x))$$

$$\text{где } P(x) = \psi'(x)/\psi(x) - \psi''(x)/\psi'(x)$$

если существует функция $\psi(x)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$K(x) - V'(x)/2 - V^2(x)/4 = \psi'(x)^2 + \left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right)^2 \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right) - \frac{3}{4} \left(\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)}\right)^2 + \frac{\psi'''(x)}{2\psi'(x)} \quad (2.11.42)$$

Практическое значение теорема 8 имеет только в том случае, если функция $\psi(x)$ существует, может быть выражена через элементарные функции и имеет достаточно простой вид. Если простое решение $\psi(x)$ существует, на практике оно может быть получено методом неопределенных коэффициентов.

Для доказательства теоремы 8 мы привели общее уравнение (2.11.33) к уравнению Штурма-Лиувилля и применили лемму 4, воспользовавшись следствием 3 теоремы 6.

В качестве примера, демонстрирующего удобство предлагаемого метода, рассмотрим применение леммы 4 и теоремы 8 к уравнению простого вида, решение которого неочевидно, и приведем его к уравнению Бесселя:

$$y''(x) + x y(x) = 0$$

$$g(x) = x \quad \text{— используем обозначения леммы 4}$$

Из общего вида отношения (2.11.41) для рассматриваемого случая можно предположить, что решением дифференциального уравнения (2.11.41) будет степенная функция, которую мы будем искать методом неопределенных коэффициентов в виде:

$$\psi(x) = h x^s$$

Подставим предполагаемое значение функции в уравнения из леммы 4 и получим отношение:

$$P(x) = \psi'(x)/\psi(x) - \psi''(x)/\psi'(x) \quad (2.11.28)$$

$$S(x) = \psi'(x)^2 (1 - \nu^2/\psi(x)^2) \quad (2.11.29)$$

$$g(x) = S(x) - P'(x)/2 - P^2(x)/4 \quad (2.11.40)$$

Отсюда получаем:

$$P(x) = 1/x$$

$$S(x) = h^2 s^2 x^{2s-2} (1 - \nu^2/(h^2 x^{2s}))$$

$$g(x) = x = h^2 s^2 x^{2s-2} (1 - \nu^2/(h^2 x^{2s})) + 1/4 x^2$$

Преобразуем и упростим:

$$x = h^2 s^2 x^{2s-2} - \nu^2 s^2/x^2 + 1/4 x^2$$

Очевидно, что отношение примет вид тождества, если потребовать тождественного соответствия коэффициентов при степенях и равенство степеней переменной:

$$1 = 2s - 2 \quad 1 = hs \quad 1/4 = \nu^2 s^2$$

Отсюда получаем следующие значения:

$$s = 3/2 \quad h = 2/3 \quad \nu = 1/3$$

Таким образом, решением уравнения будет:

$$y''(x) + x y(x) = 0$$

$$y(x) = x^{1/2} Z_{1/3}(2/3 x^{3/2})$$

Мы получили решение неочевидного уравнения, выраженного через функции Бесселя и элементарные функции. Такой же результат можно получить, сразу подставив значение функции замены с неизвестными коэффициентами в дифференциальное уравнение (2.11.41). Результат полностью совпадает с табличными данными.

Преимущество используемого метода и теоремы 8 очевидно — если простое решение задачи приведения существует, оно может быть получено методом решения некоторого дифференциального уравнения (2.11.41) методом неопределенных коэффициентов.

Рассмотренный пример является частным случаем дифференциальных уравнений вида:

$$u''(x) + ax^{-2}u'(x) + bx u(x) = 0$$

Используем замену вида $\psi(x) = h x^s$ $P(x) = 1/x$
Приведем уравнение к уравнению Штурма-Лиувилля

$$y''(x) + g(x)y(x) = 0$$

$$g(x) = bx + a(2-a)/4x^2$$

$$u(x) = \exp\left(-\int a\xi^{-2}/2 d\xi\right)y(x) = c \exp(a/x)y(x)$$

$$y(x) = \exp\left(\int P(\xi)/2 d\xi\right)z(\psi(x)) = x^{1/2}z(\psi(x))$$

$$g(x) = h^2 s^2 x^{2s-2} (1 - \nu^2/(h^2 x^{2s})) + 1/4 x^2$$

Очевидно, что потенциал $g(x)$ примет вид тождества, если потребовать тождественного соответствия коэффициентов при степенях и равенство степеней переменной:

$$1 = 2s - 2 \quad b = h^2 s^2 \quad 2a - a^2 = 1 - 6\nu^2$$

Отсюда получаем следующие значения:

$$s = 3/2 \quad h = 2/3 \quad b^{1/2} \quad \nu = |a-1|/3 \geq 0$$

Таким образом, решением уравнения будет:

$$u''(x) + ax^{-2}u'(x) + bx u(x) = 0$$

$$u(x) = \exp(a/x) x^{1/2} Z_\nu(2/3 b^{1/2} x^{3/2})$$

где индекс уравнения Бесселя $\nu = |a-1|/3 \geq 0$

Таким образом, мы последовательно рассмотрели несколько критериев, по которым дифференциальные уравнения второго порядка могут или не могут быть приведены к уравнению Бесселя — критерии теоремы 6, 7 и 8. Они исходят из общего вида потенциалов уравнения, которое исследуется на приводимость к уравнению Бесселя.

Следующим вариантом, приводящим некоторое дифференциальное уравнение к уравнению Штурма-Лиувилля и использующая его решение, является замена вида:

$$\omega(\zeta) = B(\psi(\zeta)) z(\psi(\zeta)) \quad (2.11.37)$$

использующую цепочку уравнений:

$$z''(x) + E(x)z'(x) + H(x)z(x) = 0 \quad (2.11.6)$$

$$u''(x) + Q(x)u'(x) + G(x)u(x) = 0 \quad (2.11.2)$$

$$\omega''(\zeta) + P(\zeta)\omega'(\zeta) + S(\zeta)\omega(\zeta) = 0 \quad (2.11.27)$$

со значениями потенциалов:

$$E(x) = 1/x \quad \text{и} \quad H(x) = (x^2 - \nu^2)/x^2$$

По теореме 6 используем преобразование:

$$u(x) = \exp\left(\int^x U(\xi) d\xi\right) z(x) \quad (2.11.3)$$

$$\text{где } U(x) = (E(x) - Q(x))/2 \quad (2.11.4)$$

$$U'(x) + U^2(x) + Q(x)U(x) = H(x) - G(x) \quad (2.11.5)$$

Подставим потенциалы в уравнения и получим:

$$u(x) = x^{1/2} \exp\left(\int^x -Q(x)/2 d\xi\right) z(x)$$

$$G(x) = (x^2 - \nu^2)/x^2 + (Q'(x) + Q(x)/x)/2$$

Далее будем использовать замену переменных. Применим теорему 7 о замене переменных в уравнениях:

$$x = \psi(\zeta) \quad z(x) = z(\psi(\zeta)) = \omega(\zeta) \quad (2.11.17)$$

$$P(\zeta) = Q(\psi(\zeta))\psi'(\zeta) - \psi''(\zeta)/\psi'(\zeta) \quad (2.11.18)$$

$$S(\zeta) = G(\psi(\zeta))(\psi'(\zeta))^2 \quad (2.11.19)$$

В практических задачах нам известны потенциалы $P(\zeta)$ и $S(\zeta)$ и необходимо совершить обратный переход к уравнению Бесселя. Потенциалы двух уравнений подряд в системе не определены и обратная задача затруднительна.

Однако мы можем рассматривать замену (2.11.37) в элементарных или иных функциях и изучать классы уравнений, к которым приводит та или иная замена.

Лемма 5. Дифференциальное уравнение вида:

$$\omega''(x) + P(x)\omega'(x) + S(x)\omega(x) = 0 \quad (2.11.27)$$

может быть приведено к уравнению Бесселя

$$z''(x) + E(x)z'(x) + H(x)z(x) = 0 \quad (2.11.6)$$

$$E(x) = 1/x \quad \text{и} \quad H(x) = (x^2 - \nu^2)/x^2$$

при помощи функции замены $\psi(x)$ вида:

$$\omega(x) = \psi(x)^a z(\psi(x)) \quad (2.11.38)$$

если можно подобрать замену, удовлетворяющую

$$P(x) = (1 - 2a)\psi'(x)/\psi(x) - \psi''(x)/\psi'(x) \quad (2.11.39)$$

$$S(x) = (\psi'(x))^2 (1 - (\nu^2 - a^2)/\psi(x)^2) \quad (2.11.40)$$

Для доказательства леммы достаточно рассмотреть, к какому уравнению по теореме 6 будет приведено уравнение Бесселя при помощи степенной функции замены (2.11.37):

$$B(x) = x^a \quad \text{где} \quad u(x) = x^a z(x)$$

$$u''(x) + Q(x)u'(x) + G(x)u(x) = 0 \quad (2.11.2)$$

Использование общего вида замены приведет к таким значениям потенциалов нового уравнения:

$$U(x) = a/x \quad \text{— потенциал замены из теоремы 6}$$

$$Q(x) = (1 - 2a)/x \quad \text{и} \quad G(x) = (1 - (\nu^2 - a^2)/x^2)$$

Затем применим теорему 7 о замене переменных и заменим переменную x на некоторую функцию $\psi(x)$. Это дает необходимые соотношения (2.11.39) и (2.11.40). Лемма 5 имеет практическое значение только в том случае, если функция замены достаточно простая и может быть выражена через элементарные функции.

Рассмотрим в качестве примера применения леммы 5 некоторое дифференциальное уравнение общего вида:

$$\omega''(x) + P(x)\omega'(x) + S(x)\omega(x) = 0 \quad (2.11.41)$$

$$\text{где } P(x) = \gamma/x \quad \text{и} \quad S(x) = \alpha x^\beta \quad (2.11.42)$$

Исходя из общего вида уравнений (2.11.39) и (2.11.40), можно предположить, что функция замены может быть найдена методом неопределенных коэффициентов как элементарная степенная функция:

$$\psi(x) = cx^b \quad \text{где } b \text{ и } c \text{ — неизвестные.}$$

Подставим функцию замены в уравнения (2.11.39) и (2.11.40), сократим и получим отношения:

$$\gamma = 1 - 2ab$$

$$\alpha x^\beta = b^2 c^2 x^{2b-2} (1 - (v^2 - a^2)/(cx^b)^2)$$

Очевидно, что нужно дополнительно потребовать:

$$\beta = 2b - 2 \quad \alpha = b^2 c^2 \quad v = a$$

$$\text{Отсюда } b = (\beta + 2)/2 \quad c = 2\alpha^{1/2}/(\beta + 2) \\ a = v = (1 - \gamma)/(\beta + 2)$$

Таким образом, с точностью до некоторой константы решение уравнения (2.11.41) можно выразить через следующее общее решение классического уравнения Бесселя:

$$\omega(x) = x^{ba} Z_\nu(cx^b)$$

Мы показали метод, которым можно исследовать дифференциальные уравнения на возможность приведения их к уравнению Бесселя с использованием простых функций замен в соответствии с теоремами 6 и 7.

Для доказательства леммы 5 мы рассмотрели конкретную функцию замены — простейшую степенную функцию. Вместо нее можно использовать любые элементарные функции и таким образом определять новые критерии приводимости классов дифференциальных уравнений. Однако можно заметить следующее.

При решении конкретной задачи (2.11.42) это решение мы могли бы получить, напрямую используя линейную замену теоремы 8. Фактически, лемма 5 и вся общая замена вида (2.11.37) оказались частным случаем теоремы 8.

Наиболее сложным, хотя практически еще применимым методом является использование замены вида:

$$u(x) = A(x)B(\psi(x))z(\psi(x)) \quad (2.11.38)$$

В частности, Ломмель при исследовании общих решений уравнений (2.11.26) использовал на практике частный случай замены (2.11.25) именно такого вида. Он использовал частный случай (2.11.38) и получил широкий класс дифференциальных уравнений, приводимых к уравнению Бесселя.

На практике при решении задачи приведения дифференциальных уравнений к классическому уравнению Бесселя использование усложненных критериев (2.11.38) является неудобным. Более того, использованная Ломмелем замена вида (2.11.38) также может рассматриваться как частный случай теоремы 8 о существовании линейной замены.

Все рассмотренные замены на практике являются частными случаями теоремы 8 и обобщенной замены:

$$u(x) = A(x) z(\psi(x)) \quad (2.11.36)$$

Это связано с тем, что последовательное применение к одному дифференциальному уравнению двух и более замен теоремы 6 о приводимости уравнений эквивалентно однократному применению условий этой теоремы и существованию обобщающей замены. Последовательное применение теоремы 7 о замене переменных также эквивалентно однократному применению условий этой теоремы. Для линейных дифференциальных уравнений и теорем 6 и 7 строго соблюдается закон транзитивности.

Это доказывает тот факт, что линейная замена теоремы 8 является обобщенным случаем линейной замены и охватывает все прочие частные случаи (в том числе достаточно сложного вида), используемые на практике.

Достоинства метода прямого применения теорем 6, 7 и 8 о приводимости дифференциальных уравнений друг к другу очевидны. В этом случае задача приведения сводится к решению некоторых дифференциальных уравнений методом неопределенных коэффициентов.

§ 12. Итоговые результаты главы

Подытожим результаты, полученные в настоящей главе. Мы изучали основные свойства фундаментальных решений уравнения Бесселя — цилиндрических функций.

$$x^2 z''(x) + x z'(x) + (x^2 - \nu^2) z(x) = 0 \quad (2.1.1)$$

где ν — некоторая константа (можно считать, что эта константа неотрицательна $\nu \geq 0$), а $y(x)$ — функция.

Уравнение Бесселя также записывается в форме:

$$z''(x) + \frac{1}{x} z'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) z(x) = 0 \quad (2.1.2)$$

Классическое уравнение Бесселя может быть приведено к уравнению Штурма-Лиувилля:

$$y_\nu''(x) - \frac{(\nu - 1/2)(\nu + 1/2)}{x^2} y_\nu(x) = -y_\nu(x) \quad (2.1.5)$$

$$\text{при помощи замены вида: } y_\nu(x) = \sqrt{x} J_\nu(x) \quad (2.1.6)$$

Для классических решений уравнения Бесселя существуют рекуррентные отношения вида:

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J'_\nu(x) \quad (2.1.12)$$

$$J_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J'_\nu(x) \quad (2.1.13)$$

Полученные рекуррентные отношения позволяют выписать еще одну пару рекуррентных отношений, связывающие три функции Бесселя:

$$2J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) \quad (2.1.28)$$

$$J_{\nu-1}(x) - 2\frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu+1}(x) = 0 \quad (2.1.29)$$

Для решений классического уравнения Бесселя существуют интегральные формы рекуррентных отношений:

$$J_\nu(x) = - \int_{\xi}^x \frac{x^\nu}{\xi^\nu} J_{\nu+1}(\xi) d\xi \quad (2.2.11)$$

Ограниченные в нуле функции Бесселя с полуцелым индексом выражаются через элементарные функции:

$$J_{n+1/2}(x) = (-1)^n x^{n+1/2} \left(\frac{d}{x dx}\right)^n \frac{\sin x}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (2.2.23)$$

Асимптотическое поведение этих функций:

$$J_{n+1/2}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(-1)^n}{x^{1/2}} \frac{d^n}{dx^n} \sin x \quad (2.3.7)$$

Неограниченные в нуле функции Бесселя с полуцелым индексом выражаются через элементарные функции:

$$J_{-n-1/2}(x) = x^{n+1/2} \left(\frac{d}{x dx}\right)^n \frac{\cos x}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (2.4.10)$$

При целых значениях индекса решение уравнения Бесселя может быть получено разложением в ряд:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k! (n+k)!} \text{ при } n \geq 0 \quad (2.5.8)$$

При нецелых значениях индекса существуют два частных линейно-независимых решения уравнения Бесселя:

$$J_{\pm\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\pm\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k! \Gamma(\mp\nu + k + 1)} \quad \nu \geq 0 \quad (2.5.9)$$

Чтобы получить два линейно-независимых решения уравнения Бесселя при всех значениях индекса, были введены функции Неймана.

Неограниченные в нуле функции Неймана удовлетворяют следующему отношению:

$$\mathcal{N}_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad \text{для } \nu \geq 0 \quad (2.6.1)$$

Корни решений уравнения Бесселя, кроме возможно нуля, являются простыми. Корни последовательных решений уравнения Бесселя перемежаются друг с другом. Корни двух линейно-независимых решений уравнения Бесселя, имеющих одинаковый индекс, перемежаются друг с другом.

К классическому уравнению Бесселя приводится дифференциальное уравнение вида:

$$u''(x) + Q(x)u'(x) + G(x)u(x) = 0 \quad (2.11.2)$$

с использованием аналитической замены вида:

$$u(x) = \exp\left(\int^x U(\xi) d\xi\right) z(x) \quad (2.11.10)$$

$$\text{где } U(x) = (1/x - Q(x))/2 \quad (2.11.11)$$

$$U'(x) + U^2(x) + Q(x)U(x) = (1 - \nu^2/x^2) - G(x)$$

Некоторое дифференциальное уравнение вида:

$$\omega''(\zeta) + P(\zeta)\omega'(\zeta) + S(\zeta)\omega(\zeta) = 0 \quad (2.11.27)$$

может быть приведено к уравнению Бесселя при помощи замены переменных вида:

$$x = \psi(\zeta) \quad \omega(\zeta) = z(\psi(\zeta)) \quad (2.11.17)$$

$$\psi(\zeta) = c \exp\left(\int^\zeta \left(\exp\left(-\int^\xi P(\eta) d\eta\right)\right) d\xi\right) \quad (2.11.31)$$

$$S(\zeta) = \psi'(\zeta)^2 - \nu^2 (\psi'(\zeta)/\psi(\zeta))^2 \quad (2.11.29)$$

Для получения обобщенной замены и приведения дифференциального уравнения к уравнению Бесселя необходимо последовательно применить две эти теоремы.

Дифференциальное уравнение вида:

$$u''(x) + V(x)u'(x) + K(x)u(x) = 0 \quad (2.11.33)$$

может быть приведено к уравнению Бесселя при помощи обобщенной замены вида:

$$u(x) = \exp\left(\int^x (P(\xi) - V(x))/2 d\xi\right) z(\psi(x))$$

$$\text{где } P(x) = \psi'(x)/\psi(x) - \psi''(x)/\psi'(x)$$

если существует функция $\psi(x)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$K(x) - V'(x)/2 - V^2(x)/4 = \psi'(x)^2 + \left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right)^2 \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right) - \frac{3}{4} \left(\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)}\right)^2 + \frac{\psi'''(x)}{2\psi'(x)} \quad (2.11.42)$$

Практическое значение теорема имеет в том случае, если функция $\psi(x)$ существует, может быть выражена через элементарные функции и имеет простой вид. Если простое решение $\psi(x)$ существует, на практике оно может быть получено методом неопределенных коэффициентов.

Обобщенная замена имеет общий вид:

$$u(x) = A(x) z(\psi(x)) \quad (2.11.36)$$

Рекуррентные отношения для решений классического уравнения Бесселя были получены напрямую, с использованием метода рекуррентных отношений, исходя только из общего вида потенциалов уравнения Бесселя.

Приведение однородных дифференциальных уравнений к уравнению Бесселя и представление их решений при помощи общего решения уравнения Бесселя исходит только из общего вида потенциалов приводимого уравнения.

Активно использовалось уравнение Штурма-Лиувилля к которому уравнение Бесселя приводится единственным образом — для получения рекуррентных отношений, асимптотических разложений, изучения поведения нулей решений уравнения Бесселя и получения формул приведения дифференциальных уравнений к уравнению Бесселя.

Г л а в а III

Другие аспекты уравнений Бесселя и цилиндрических функций

§ 1. Приведение дифференциальных уравнений старших порядков к уравнению Бесселя

В предыдущей главе подробно изучались общие свойства решений уравнения Бесселя — функций Бесселя, Неймана и других специальных (цилиндрических) функций и рассматривались вопросы приводимости к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. Она рассчитана на широкую аудиторию, имеющую базовую подготовку.

Для лиц, которые используют функции Бесселя и Неймана для решения практических задач и хотят подробнее узнать об особенностях их поведения и наиболее типичных их свойствах, предыдущая глава предоставляет исчерпывающую информацию.

Последующие главы рассчитаны на лиц, занимающихся углубленным изучением высшей математики, математической физики и теории специальных функций, и могут представлять некоторые затруднения для неспециалистов.

Приведем результат, принадлежащий Ломмелю. Рассмотрим новый обобщенный дифференциальный оператор:

$$\mathcal{D}f(x) = \left(x \frac{d}{dx}\right) f(x) \quad (3.1.1)$$

Рассмотренное в предыдущей главе дифференциальное уравнение (2.1.24), приводимое к уравнению Бесселя, с использованием оператора (3.1.1) может быть записано в виде:

$$(\mathcal{D} + \alpha)(\mathcal{D} + \alpha - 2\beta\nu)u(x) + \beta^2 \gamma^2 x^{2\beta} u(x) = 0$$

$$\text{его решение } u(x) = x^{\beta\nu - \alpha} Z_\nu(\gamma x^\beta)$$

Ломмель и Ватсон обобщили полученное уравнение, получив решение целого класса дифференциальных уравнений старших порядков:

$$\prod_{k=0}^{n-1} (\mathcal{D} + \alpha - 2\beta k)(\mathcal{D} + \alpha - 2\beta k - 2\beta\nu)u(x) = (-1)^n \beta^{2n} \gamma^{2n} x^{2n\beta} u(x) \quad (3.1.2)$$

Решения этого уравнения имеют вид:

$$u(x) = x^{\beta\nu - \alpha} Z_\nu(\gamma x^\beta) \quad (3.1.3)$$

где $\gamma = c \exp(ik\pi/n)$ для $k = 1 \dots n$

Полученные решения образуют фундаментальную систему. Мы можем получить частные случаи — например, дифференциальные уравнения четвертого и более высокого четного порядка.

К дифференциальным уравнениям более высоких порядков часто приводит метод разделения переменных в прикладных задачах математической физики. Рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка, описывающее поперечные колебания конического стержня:

$$\frac{d^2}{d\zeta^2} \left(\zeta^4 \frac{d^2 u}{d\zeta^2} \right) = \zeta^2 u(\zeta) \quad (3.1.4)$$

Если произвести замену переменных

$$x = 2\zeta^{1/2} \text{ и обозначить } \zeta^2 u(\zeta) = z(x)$$

то уравнение четвертого порядка (3.1.4) может быть приведено к системе двух уравнений Бесселя:

$$z''(x) + \frac{1}{x} z'(x) \pm z(x) - \frac{4}{x^2} z(x) = 0 \quad (3.1.5)$$

Рассмотрим наиболее общий случай приводимости линейных дифференциальных уравнений старших порядков к уравнению Бесселя, воспользовавшись результатами, полученными в предыдущей главе. Очевидно, что к уравнению Бесселя могут приводиться дифференциальные уравнения старшего порядка с четной старшей производной.

Для этого рассмотрим обобщенный дифференциальный оператор (3.1.1) и изучим его свойства более подробно. Рассмотрим приведение различных дифференциальных уравнений к общему виду с использованием оператора (3.1.1).

Чтобы рассмотреть обобщенный дифференциальный оператор старших порядков, запишем следующее:

$$\prod_{k=1}^n (\mathcal{D} + a_k) = \sum_{k=0}^n \mathcal{D}^k S_{n-k} \quad (3.1.6)$$

$$\text{где } S_0 = 1 \quad S_1 = a_1 + \dots + a_n \quad S_n = a_1 \dots a_n$$

$$S_k = \sum_0^{n-k} a_{i_1} \dots a_{i_k} \quad \text{для всех индексов } ip \neq il$$

Рассмотрим обобщенный дифференциальный оператор второго порядка и получим выражение в явной форме:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D} + a_1)(\mathcal{D} + a_2) &= \left(x \frac{d}{dx} + a_1\right) \left(x \frac{d}{dx} + a_2\right) = \\ &= x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x(a_1 + a_2 + 1) \frac{d}{dx} + a_1 a_2 \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Отсюда можно получить частный случай:

$$(\mathcal{D} + \nu)(\mathcal{D} - \nu) = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} - \nu^2 \quad (3.1.8)$$

Уравнение Бесселя можно представить в виде:

$$(\mathcal{D} + \nu)(\mathcal{D} - \nu) z(x) + x^2 z(x) = 0 \quad (3.1.9)$$

Дифференциальное уравнение старшего порядка, которое может быть приведено к уравнению Бесселя, должно быть приведено к следующему виду:

$$\prod_{k=1}^n ((\mathcal{D} + \nu_k)(\mathcal{D} - \nu_k) + x^2) z(x) = 0 \quad (3.1.10)$$

Фундаментальной системой решений уравнения вида (3.1.10) являются линейно-независимые функции $z_{\pm k}(x)$.

Это справедливо, так как выполняется тождество:

$$((\mathcal{D} + \nu_k)(\mathcal{D} - \nu_k) + x^2) z_{\pm k}(x) = 0 \quad (3.1.11)$$

для каждого значения параметра $k = 1..n$

Для того, чтобы линейные дифференциальные уравнения старшего порядка изучать на приводимость к классическому уравнению Бесселя, эти уравнения необходимо привести к виду (3.1.10).

Далее необходимо выделить пары линейных операторов, произведения которых приводят к классическому уравнению Бесселя (3.1.11).

Например, дифференциальное уравнение четвертого порядка может быть приведено к двум независимым уравнениям Бесселя, шестого порядка — к трем уравнениям.

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения старшего порядка может быть представлено линейной комбинацией частных решений уравнений Бесселя, к которым было приведено дифференциальное уравнение.

Дифференциальные уравнения второго порядка достаточно часто встречаются в прикладных задачах математической физики.

Вопросы приведения линейных дифференциальных уравнений второго порядка к уравнению Бесселя рассматривались в предыдущей главе и уже представляли определенную сложность. Приведение уравнений старшего порядка — еще более сложный и кропотливый процесс.

В задачах математической физики могут встречаться линейные дифференциальные уравнения четвертого порядка — например, они задают описание прочностных характеристик, сложные колебания и т.д. Нахождение аналитических решений таких уравнений является достаточно сложным.

Получение аналитических решений дифференциальных уравнений шестого порядка и выше на практике оказывается крайне затруднительным — или рассматриваемые уравнения аналитически приводятся к уравнениям меньшего порядка, или для их решения используют численные методы и компьютерные вычисления.

Общее решение дифференциальных уравнений старших порядков можно аналогично искать в общем виде:

$$u(\zeta) = A(\zeta) \sum_{k=1}^n c_{k1} z_k(\psi(\zeta)) + c_{k2} z_{-k}(\psi(\zeta)) \quad (3.1.12)$$

где $z_{\pm k}(x)$ — пары линейно-независимых решений уравнений Бесселя с индексами ν_k

Рассмотрим популярный частный случай дифференциальных уравнений — уравнение четвертого порядка, общее решение которого можно представить через две пары линейно-независимых решений уравнения Бесселя действительного и чисто мнимого переменного одного индекса.

$$((\mathcal{D}+\nu)(\mathcal{D}-\nu)+x^2)z(x)=0 \quad (3.1.9)$$

$$((\mathcal{D}+\nu)(\mathcal{D}-\nu)-x^2)z(x)=0 \quad (3.1.13)$$

$$z(x)=c_1J_\nu(x)+c_2\mathcal{N}_\nu(x)+c_3I_\nu(x)+c_4\mathcal{K}_\nu(x)$$

Дифференциальное уравнение четвертого порядка, решение которого может быть представлено таким образом, согласно (3.1.10) записывается в виде:

$$\begin{aligned} &((\mathcal{D}+\nu)(\mathcal{D}-\nu)+x^2)((\mathcal{D}+\nu)(\mathcal{D}-\nu)- \\ &-x^2)z(x)=0 \\ &(\mathcal{D}^4-2\nu^2\mathcal{D}^2+\nu^4-x^4)z(x)=0 \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Выпишем степени дифференциального оператора:

$$\mathcal{D}^2=x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx} \quad (3.1.15)$$

$$\mathcal{D}^3=x^3\frac{d^3}{dx^3}+3x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx} \quad (3.1.16)$$

$$\mathcal{D}^4=x^4\frac{d^4}{dx^4}+6x^3\frac{d^3}{dx^3}+7x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx} \quad (3.1.17)$$

После приведения получим следующее дифференциальное уравнение достаточно сложного вида:

$$\begin{aligned} &(x^4\frac{d^4}{dx^4}+6x^3\frac{d^3}{dx^3}+x^2(7-2\nu^2)\frac{d^2}{dx^2}+ \\ &+x(1-2\nu^2)\frac{d}{dx}+\nu^4-x^4)z(x)=0 \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Аналогично можно рассмотреть случай, когда индекс одного уравнения Бесселя, соответствующего действительному переменному, не равен индексу второго уравнения Бесселя, соответствующего чисто мнимому переменному:

$$z(x)=c_1J_{\nu_1}(x)+c_2\mathcal{N}_{\nu_1}(x)+c_3I_{\nu_2}(x)+c_4\mathcal{K}_{\nu_2}(x)$$

$$((\mathcal{D}+\nu_1)(\mathcal{D}-\nu_1)+x^2)((\mathcal{D}+\nu_2)(\mathcal{D}-\nu_2)-x^2)z(x)=0$$

$$\begin{aligned} &(\mathcal{D}^4-(\nu_1^2+\nu_2^2)\mathcal{D}^2+\nu_1^2\nu_2^2+ \\ &+x^2(\nu_1^2-\nu_2^2)-x^4)z(x)=0 \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

После приведения получим следующее дифференциальное уравнение достаточно сложного вида:

$$\begin{aligned} &(x^4\frac{d^4}{dx^4}+6x^3\frac{d^3}{dx^3}+x^2(7-(\nu_1^2+\nu_2^2))\frac{d^2}{dx^2}+ \\ &+x(1-(\nu_1^2+\nu_2^2))\frac{d}{dx}+\nu_1^2\nu_2^2+ \\ &+x^2(\nu_1^2-\nu_2^2)-x^4)z(x)=0 \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Уравнение можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} &(\frac{d^4}{dx^4}+\frac{6}{x}\frac{d^3}{dx^3}+\frac{7-(\nu_1^2+\nu_2^2)}{x^2}\frac{d^2}{dx^2}+ \\ &+\frac{1-(\nu_1^2+\nu_2^2)}{x^2}\frac{d}{dx}+\frac{\nu_1^2\nu_2^2}{x^4}+ \\ &+\frac{\nu_1^2-\nu_2^2}{x^2}-1)z(x)=0 \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Вариант, когда решение уравнения четвертого порядка представимо только через функции действительного или только чисто мнимого переменного, рассматривается аналогично. Однако в практических задачах математической физики случай (3.1.14) и (3.1.19) встречается чаще. А теперь рассмотрим алгоритмы на языке JavaScript.

Глава IV

Программы и алгоритмы вычислений

§ 1. Общая постановка задачи вычислений

В данной главе приводятся программы вычислений функций Бесселя и других цилиндрических функций математической физики, написанные автором на языке JavaScript. На сегодняшний день этот язык имеет достаточно много преимуществ по сравнению с другими языками программирования.

В отличие от популярных языков типа C++, Pascal и др., язык JavaScript поддерживается практически всеми современными интернет-браузерами и не требует специальной инсталляции. JavaScript — встроенный язык программирования веб-страниц, который имеет хорошие средства вывода на экран монитора и в файл в форме HTML- и XML-разметки. Программы выполняются на локальном компьютере.

Вывод данных и результатов расчетов на монитор в форме таблиц или текстового файла не представляет никаких затруднений, так как он предусмотрен средствами языка JavaScript. Пользователю остается только сохранить результаты вычислений на компьютер из браузера.

Недостатком JavaScript является отсутствие средств для вывода графической информации и построения графиков, что не помешало автору, которая смогла реализовать вывод данных на экран монитора и на печать в форме эмуляции псевдо-графики средствами разметки. Скорость отрисовки графиков зависит в первую очередь от типа интернет-браузера и несколько менее — от скорости компьютера.

Ко второй половине XX века были накоплены хорошие математические библиотеки, написанные на языках типа Алгол, Фортран и др. Однако к концу XX века произошел качественный скачок в развитии программирования — были созданы принципиально новые объектно-ориентированные языки структурного программирования типа PL/1, Pascal, C, C++ и др. Началась разработка принципиально нового средства электронного представления и передачи

информации — глобальная сеть Интернет. Для реализации клиентских сценариев был создан язык JavaScript. Глобализация мировых процессов имела и существенные недостатки — в частности, были фактически утеряны многие программные разработки математического аппарата.

В начале XXI века программы математического аппарата начали восстанавливаться. В частности, были разработаны специальные математические библиотеки, в которых уже проверенные алгоритмы численных методов были переписаны новыми средствами программирования. К недостатку таких библиотек относится их закрытость и то, что они распространяются по платной лицензии или незаконными «пиратскими» копиями. Одними из наиболее популярных языков программирования начала XXI века продолжают оставаться Pascal, C, C++ и т. п.

К несомненным достоинствам языка JavaScript относится его доступность и открытая архитектура, хорошие средства для вывода данных в интернет-браузеры, фактическая бесплатность и свободное распространение библиотек программ на JavaScript. Хотя этот язык имеет много схожего с C++ (именно на его базе была построена система команд JavaScript), идеология программирования на JavaScript заметно отличается от C и C++, скорее напоминая «продвинутые» версии языка PL/1 и подобных более ранних языков структурного программирования.

Практически никто из разработчиков современных математических программ не использует встроенный в браузеры язык программирования JavaScript для проведения математических вычислений. Этот язык чаще всего используется для создания динамического дизайна веб-страниц и предварительной обработки данных веб-дизайнерами, а не программистами как таковыми.

Работая веб-дизайнером, создавая сайты, веб-страницы и программы на JavaScript для «клиентской стороны», автор смогла увидеть практически неограниченные возможности и потрясающую гибкость этого языка и удобство его применения, совершенно незаслуженно не используемого в математическом программировании. С целью показать преимущества JavaScript автор разработала серию программ для вычисления значений специальных функций.

Язык JavaScript создает определенные трудности для современных программистов и особенно для программистов-математиков — автор не встречала программ из арсенала математического аппарата и численных методов, реализованных средствами языка JavaScript.

Для того, чтобы составлять реальные коммерческие программы на этом языке, недостаточно изучить программирование как таковое и систему команд JavaScript. Вывод данных из языка JavaScript имеет свою характерную специфику — он осуществляется в форме HTML- и XML-кодов и веб-страниц в интернет-браузер. Язык JavaScript тесно связан с языками гипертекстовой разметки и является встроенным объектом в веб-страницах.

Для минимального оформления вывода данных из программ, написанных на JavaScript, необходимо элементарное знание HTML- и XML-разметки. Глубокое же знание веб-дизайна и языка гипертекстовой разметки позволяет выводить на экран монитора данные практически любого визуально-привлекательного дизайна и оформления.

Чрезвычайно удобным средством для распространения и обмена программ, написанных на языке JavaScript, является глобальная сеть Интернет. Встроенные в веб-страницы программы могут размещаться на интернет-сайтах как в публичном, так и в конфиденциальном (платном или парольном) режимах. Исполняются написанные программы на стороне Клиента в его интернет-браузере, поэтому серверная сторона для вычислений не задействуется.

Пользователь написанных на языке JavaScript программ может не иметь особых навыков работы в специальных программных пакетах, не устанавливать дорогих коммерческих программ и не приобретать особые лицензии — ему достаточно иметь интернет-браузер и элементарные навыки пользователя сети Интернет.

Для сохранения результатов вычислений достаточно сохранить сгенерированную JavaScript веб-страницу на локальный компьютер или скопировать данные из интернет-браузера в любое удобное пользователю приложение (в том числе офисное). Можно также отправить данные на печать на принтер или в файл, в дальнейшем проведя обработку этого файла в более универсальном формате.

§ 2. Программное вычисление функций Бесселя

В § 5 главы 2 было получено классическое разложение в ряд функций Бесселя с использованием гамма-функций Эйлера, а именно:

$$z_{\mp\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\mp\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k! \Gamma(\mp\nu + k + 1)} \quad (2.5.7)$$

Прикладные вычисления значений функций Бесселя в окрестностях нуля для малых индексов с заданной точностью с использованием компьютерных технологий основано именно на этом разложении в ряд.

Данная формула не может быть использована для вычислений значений функций Бесселя при целых отрицательных значениях индекса, так как в явном виде она вырождается. При нахождении значений функций Бесселя с полупелым индексом также используются другие разложения — в конечный ряд в явном виде.

Программа 1. Вычисление значений функций Бесселя при целых неотрицательных значениях индекса на базе ранее полученного разложения в ряд

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k! (n+k)!} \text{ при } n \geq 0 \quad (2.5.8)$$

Поскольку расчеты проводятся на персональных компьютерах с 32-разрядным представлением данных, и язык JavaScript рассчитан именно на такое представление информации, мы можем проводить явные расчеты с разумной точностью (погрешностью), не превышающей $E = 10^{-12}$.

Для большей части прикладных задач эти показатели погрешности вычислений являются достаточными и удовлетворительными. Большую часть вычислений можно производить с меньшей погрешностью — порядка $E = 10^{-6}$. Приводимые алгоритмы являются устойчивыми и учитывают негативные особенности 32-разрядного представления. Использование программ для 64-разрядного представления не влечет никаких затруднений и не имеет ограничений.

В соответствии с (2.5.8) начальный член ряда разложения функций Бесселя вычисляется по формуле:

$$a_0 = \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \quad (4.2.1)$$

Каждый последующий член этого ряда может быть вычислен в соответствии с рекуррентным отношением:

$$a_k = a_{k-1} \frac{(-1)(x/2)^2}{k(n+k)} \quad (4.2.2)$$

На основании этого программный модуль на языке JavaScript для расчета значений функции Бесселя с целым неотрицательным индексом, встраиваемый в веб-страницы и производящий вычисления без округления с заданной точностью (погрешностью), может быть представлен следующим образом:

```
<script type="text/javascript">
function NNBessel(x,n,eps)
{
    var Emax = 1E-13; /* максимальная погрешность */
    var Emin = 1E-6;  /* минимальная погрешность */

    if (x == null) x = 0; /* переменная */
    if (n == null) n = 0; /* индекс функции */
    if (eps == null) eps = Emin;
    eps = Math.abs(eps);

    /* далее исправления и коррекция запрещены */
    if (eps > Emin) eps = Emin; /* исправления */
    if (eps < Emax) eps = Emax;

    x = Math.abs(x);
    n = Math.abs(n); /* округление индекса */
    n = Math.floor(n);

    var ak = 1; /* переменные итерации */
    var s = 0; /* переменные - сумма ряда */
    var k = 0; /* нумерация членов ряда */
    var i = 1;
```

```
/* вычисление нулевого члена ряда */
for (i = 1; i <= n; i++) ak = ak * x / 2 / i;

/* вычисления ряда с заданной погрешностью */
while (Math.abs(ak) > eps)
{
    s = s + ak;
    k = k + 1;
    ak = (-1) * ak * x * x / (4 * k * (n + k));
}

/* исправление погрешности и расходимости */
if (Math.abs(s) < Emax) s = 0;
if (Math.abs(s) > 1) s = 0;

/* возврат полученного значения суммы ряда */
return s;
}
</script>
```

Вызов расчета функции Бесселя с целым индексом производится путем вызова **NNBessel(x,n,eps)**, где

x — значение переменной;
n — номер индекса функции Бесселя;
eps — точность (погрешность) вычислений.

Если указанные значения не будут заданы в параметрах и не определены, то по умолчанию принимаются следующие значения переменных для функции **NNBessel**:

x = 0 — значение переменной;
n = 0 — номер индекса функции Бесселя;
eps = 1E-6 — точность (погрешность) вычислений.

Все указанные значения переменных могут быть переопределены и заданы непосредственно пользователем в тексте самой программы — в явном виде.

Программа корректно работает во всех распространенных интернет-браузерах на компьютерах не ниже чем с 32-разрядными приложениями, при значениях целого индекса **n** от 0 до 10 (индексы округляются) и при значениях переменной **x** от 0 ориентировочно до 50 и менее.

Наилучшие результаты вычислений наблюдаются при малых значениях индекса в некоторых окрестностях нуля.

На практике пользователю может потребоваться уже готовый исполняемый модуль — как для вычислений конкретных значений функций Бесселя с целым неотрицательным индексом, так и для получения таблиц значений функций Бесселя и даже визуального построения графиков на мониторе.

Приводим полный HTML-код веб-страниц, который без изменений необходимо записать в текстовый файл в любом текстовом редакторе, установив ему специальное расширение .htm или .html. Активировав файл в интернет-браузере в локальном режиме (например, двойным щелчком мыши по имени файла или правой кнопкой мыши), пользователь сможет произвести необходимые ему расчеты.

В приводимом коде использован минимальный дизайн и строгое оформление, которое может быть изменено путем применения стилей и CSS.

Особенностью данных программ является меняющийся отчет о ходе выполнения вычислительного процесса, который печатается внизу окна в строке состояния интернет-браузера. Результаты выполнения программы в виде таблицы или графика демонстрируются в новом окне, открывающемся с момента запуска программы. Далее полученные результаты расчетов могут быть сохранены на компьютер или скопированы в любое офисное или иное совместимое приложение.

Необходимо также помнить, что в языке JavaScript десятичные дроби записываются с разделителем в виде точки, запятую в числах использовать запрещено.

Следующая программа производит построение таблицы значений для функций Бесселя с заданным целым индексом и переменными. Рекомендуется создать текстовый файл с именем и расширением **TabBessel.html**

```
<html>
<head>
<title>Функции Бесселя :: таблица значений</title>

<script type="text/javascript">
/* функция вывода таблицы фнк. Бесселя */
function TabBessel()
```

```
{
/* каждый раз открывается новое окно */
var msgWindow = Math.random() * 1000000;
msgWindow = Math.floor(msgWindow);
MsgBox = window.open("",msgWindow,"toolbar=yes,location=yes,scrollbars=yes,directories=yes,status=yes,menu
bar=yes,resizable=yes");

/* определение переменных */
var Emax = 1E-12;
var Emin = 1E-1;
var PEmax = 12;
var PEmin = 1;

var i = 0; var j = 0;
var index1 = Math.floor(document.form4.index1.value);
var index2 = Math.floor(document.form4.index2.value);
var delta = Math.abs(document.form4.delta.value);
var eps = Math.abs(document.form4.eps.value);

/* приведение констант к допустимым значениям */
if (delta < Emax) delta = Emax;
if (eps < PEmin) eps = PEmin;
if (eps > PEmax) eps = PEmax;

if ((index1 < 0) && (index2 < 0))
{ index1 = Math.abs(index1);
index2 = Math.abs(index2); }
else if ((index1 < 0) && (index2 >= 0))
{ index2 = Math.max(-index1,index2);
index1 = 0; }
else if ((index1 >= 0) && (index2 < 0))
{ index2 = Math.max(index1,-index2);
index1 = 0; }

if (index2 < index1)
{ var index0 = index2;
index2 = index1; index1 = index0; }

var NN = index2 - index1 + 1;
var iks1 = Math.abs(document.form4.iks1.value);
var iks2 = Math.abs(document.form4.iks2.value);

if (iks2 < iks1)
{ var iksx = iks2; iks2 = iks1; iks1 = iksx; }
var iks = iks1;
var ind = index1;
var Bessel = 0;
```

```

var delta2 = delta; /* борьба с округлением */
var p = 0; /* порядок степени шага */
var a = new Array();

/* определение порядка степени шага p */
while (Math.abs(delta2 - Math.floor(delta2)) > Emax)
{ delta2 = delta2 * 10 - Math.floor(delta2 * 10);
p = p + 1; }

/* вывод заголовка страницы и заголовка таблицы */
MsgBox.document.writeln('<html><head><title>Функции
Бесселя :: таблица значений</title>');
MsgBox.document.writeln("&<meta http-equiv='content-
type' content='text/html; charset=windows-1251' /></
head>");
MsgBox.document.writeln("<body><table style='font-
size: 9pt; text-align: right; font-family: verdana,ari
al,Helvetica'><colgroup><col width='100' />");

for (i = index1; i <= index2; i++) MsgBox.document.
writeln("<col width='150' />");

MsgBox.document.writeln("</colgroup><tbody><tr
style='text-align: left; font-weight: bold;'><td>x/<
td>");

for (i = index1; i <= index2; i++) MsgBox.document.
writeln("<td style='text-align: right; font-weight:
bold;'>J<sub>"+i,"</sub> (x)</td>");

var Miterac = Math.floor((iks2 - iks1) / delta) + 1;
var Niterac = 1; var delta1 = iks;

while ((Niterac <= Miterac) && (delta1 < iks2))
{ delta1 = iks; /* борьба с округлением */
delta1 = Math.round(delta1 * Math.pow(10,p)) /
Math.pow(10,p);
MsgBox.document.writeln("</tr>\n<tr><td
style='text-align: left; font-weight:
bold;'>"+delta1,"</td>");
/* запись об итерации в строку состояния */
MsgBox.document.writeln('<script type="text/
javascript">window.status=("Выполняется итерация для
аргумента x = '+delta1+' !! ")</'+script'+>');

```

```

/* вызов значений функций и запись в таблицу */
for (i = index1; i <= index2; i++)
{ Bessel = NBessel(iks,i,eps);
MsgBox.document.writeln("<td>"+Bessel,"</td>"); }

iks = iks + delta;
Niterac = Niterac + 1;
}

/* закрытие кодов таблицы и веб-страницы */
MsgBox.document.writeln("</tr></tbody></table>");
MsgBox.document.writeln("</body></html>");
MsgBox.document.close();
}

/* Получения значения Фнк. Бесселя с округлением */
function NBessel(x,n,Peps)
{
var k = 0; var i = 1;
var Emax = 1E-12; /* предельная погрешность */
var Emin = 1E-1; /* минимальная погрешность */

var PEmax = 12;
var PEmin = 1;

if (n == null) n = 1;
if (x == null) x = 0;
x = Math.abs(x);
n = Math.abs(n); /* округление индекса */
n = Math.floor(n);

var eps = 1;
if (Peps == null) Peps = PEmax;
Peps = Math.abs(Peps);
eps = 1 / Math.pow(10,Peps);

if (eps > Emin) eps = Emin;
if (eps < Emax) eps = Emax;

/* Расчет значений Фнк. Бесселя без округления */
var ak = 1;
var s = 0;
for (i = 1; i <= n; i++) ak = ak * x / 2 / i;

while (Math.abs(ak) > (eps / 10))
{ s = s + ak;
k = k + 1;
ak = (-1) * ak * x * x / (4 * k * (n + k));
}
}

```

```

/* исправление погрешности и расходимости */
if (Math.abs(s) < Emax) s = 0;
if (Math.abs(s) > 1) s = 0;

/* вывод корректного округления полученной суммы */
var sgnm = 0;
if (s > 0) sgnm = 1;
if (s < 0) sgnm = -1;
s = Math.abs(s);

var a = new Array();
a[0] = Math.floor(s);
a[1] = ".";
var str = s - a[0];

for (i = 2; i <= (Peps + 2); i++)
{ a[i] = Math.floor(str * 10);
  str = str * 10 - Math.floor(str * 10);
}

k = Peps + 2;
if (a[k] > 4)
{ k = k - 1;
  if (k == 1) k = 0;
  a[k] = a[k] + 1;
  while ((a[k] > 9) && (k > 0))
  { a[k] = 0;
    k = k - 1;
    if (k == 1) k = 0;
    a[k] = a[k] + 1;
  }
}

/* слияние полученной таблицы в единую строку */
a.pop();
if ((sgnm == -1) && (a.join("") > 0)) a.unshift("-");
s = a.join("");

/* возврат корректно округленного результата */
return s;
}
</script>
</head>

<body>
<!-- Начало отрисовки формы запроса -->
<form method="post" name="form4" id="form4">

```

```

функции Бесселя индекса n от <input type="text"
name="index1" id="index1" style="width: 50px; height:
22px; border:#5a7381 1px solid;" /> до <input
type="text" name="index2" id="index2" style="width:
50px; height: 22px; border:#5a7381 1px solid;" />
с округлением и погрешностью 10 <input type="text"
value="-6" name="eps" id="eps" style="width: 50px;
height: 22px; border:#5a7381 1px solid;" />

<br /><br />Интервал переменной x от <input
type="text" name="iks1" id="iks1" style="width: 50px;
height: 22px; border:#5a7381 1px solid;" /> до <input
type="text" name="iks2" id="iks2" style="width: 50px;
height: 22px; border:#5a7381 1px solid;" />
с шагом <input type="text" value="1E-1" name="delta"
id="delta" style="width: 50px; height: 22px;
border:#5a7381 1px solid;" />

<input type="button" value="Таблица фнк. Бесселя"
onClick="TabBessel()" style="width: 180px; height:
22px; border:#5a7381 1px solid;" />

</form>
</body></html>

```

Можно легко заметить, что непосредственное вычисление значений функции Бесселя занимает незначительный объем программы — не более 5%.

Около 95% объема текста программы занимают проверки корректности введенных данных, их исправление, организация вывода результатов вычислений в форме таблицы и веб-страницы в корректной форме после округления (в т. ч. со всеми нулями в конце чисел).

Необходимость генерации кода гипертекстовой разметки в ходе выполнения программы чаще всего и вызывает сложности у программистов, не знакомых с веб-дизайном. Однако это же делает программы на языке JavaScript очень удобными и простыми для их конечного пользователя.

Приведенный текст программы работоспособен — его можно использовать для вычислений. В качестве примера приведем таблицы значений функций Бесселя, полученные с помощью настоящей программы. Затраченное на расчеты и вывод данных время составило 2-3 секунды.

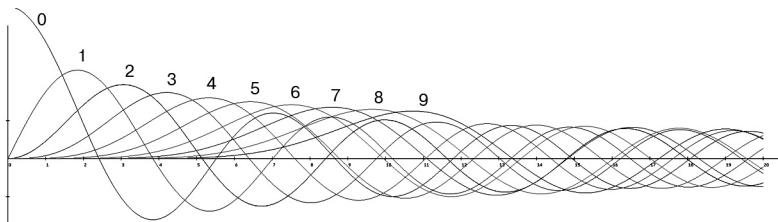
Функция Бесселя индекса n от до с округлением и погрешностью 10^{-6}

Интервал переменной x от до с шагом Таблица Фнк. Бесселя

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$	$J_6(x)$
0	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.997502	0.049938	0.001249	0.000021	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.990025	0.099501	0.004983	0.000166	0.000004	0.000000	0.000000
0.3	0.977626	0.148319	0.011166	0.000559	0.000021	0.000001	0.000000
0.4	0.960398	0.196027	0.019735	0.001320	0.000066	0.000003	0.000000
0.5	0.938470	0.242268	0.030604	0.002564	0.000161	0.000008	0.000000
0.6	0.912005	0.286701	0.043665	0.004400	0.000331	0.000020	0.000001
0.7	0.881201	0.328996	0.058787	0.006930	0.000610	0.000043	0.000003
0.8	0.846287	0.368842	0.075818	0.010247	0.001033	0.000083	0.000006
0.9	0.807524	0.405950	0.094586	0.014434	0.001641	0.000149	0.000011
1	0.765198	0.440051	0.114903	0.019563	0.002477	0.000250	0.000021
1.1	0.719622	0.470902	0.136564	0.025695	0.003588	0.000399	0.000037
1.2	0.671133	0.498289	0.159349	0.032874	0.005023	0.000610	0.000061
1.3	0.620086	0.522023	0.183027	0.041136	0.006831	0.000901	0.000099
1.4	0.566855	0.541948	0.207356	0.050498	0.009063	0.001290	0.000152
1.5	0.511828	0.557937	0.232088	0.060964	0.011768	0.001799	0.000228
1.6	0.455402	0.569896	0.256968	0.072523	0.014995	0.002452	0.000332
1.7	0.397985	0.577765	0.281739	0.085150	0.018790	0.003275	0.000472
1.8	0.339986	0.581517	0.306144	0.098802	0.023197	0.004294	0.000657
1.9	0.281819	0.581157	0.329926	0.113423	0.028253	0.005538	0.000897
2	0.223891	0.576725	0.352834	0.128943	0.033996	0.007040	0.001202
2.1	0.166607	0.568292	0.374624	0.145277	0.040453	0.008828	0.001587
2.2	0.110362	0.555963	0.395059	0.162325	0.047647	0.010937	0.002066
2.3	0.055540	0.539873	0.413915	0.179979	0.055596	0.013397	0.002653
2.4	0.002508	0.520185	0.430980	0.198115	0.064307	0.016242	0.003367
2.5	-0.048384	0.497094	0.446059	0.216600	0.073782	0.019502	0.004225
2.6	-0.096805	0.470818	0.458973	0.235294	0.084013	0.023207	0.005246
2.7	-0.142449	0.441601	0.469562	0.254045	0.094984	0.027388	0.006452
2.8	-0.185036	0.409709	0.477685	0.272699	0.106669	0.032069	0.007863
2.9	-0.224312	0.375427	0.483227	0.291093	0.119033	0.037276	0.009503
3	-0.260052	0.339059	0.486091	0.309063	0.132034	0.043028	0.011394
3.1	-0.292064	0.300921	0.486207	0.326443	0.145618	0.049345	0.013559
3.2	-0.320188	0.261343	0.483528	0.343066	0.159722	0.056238	0.016022
3.3	-0.344296	0.220663	0.478032	0.358769	0.174275	0.063717	0.018806
3.4	-0.364296	0.179226	0.469722	0.373389	0.189199	0.071785	0.021934
3.5	-0.380128	0.137378	0.458629	0.386770	0.204405	0.080442	0.025429
3.6	-0.391769	0.095466	0.444805	0.398763	0.219799	0.089680	0.029311
3.7	-0.399230	0.053834	0.428330	0.409225	0.235279	0.099485	0.033601
3.8	-0.402556	0.012821	0.409304	0.418026	0.250736	0.109840	0.038316
3.9	-0.401826	-0.027244	0.387855	0.425044	0.266059	0.120718	0.043474

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$	$J_6(x)$
4	-0.397150	-0.066043	0.364128	0.430171	0.281129	0.132087	0.049088
4.1	-0.388670	-0.103273	0.338292	0.433315	0.295827	0.143908	0.055168
4.2	-0.376557	-0.138647	0.310535	0.434394	0.310029	0.156136	0.061725
4.3	-0.361011	-0.171897	0.281059	0.433347	0.323611	0.168720	0.068761
4.4	-0.342257	-0.202776	0.250086	0.430127	0.336450	0.181601	0.076279
4.5	-0.320542	-0.231060	0.217849	0.424704	0.348423	0.194715	0.084276
4.6	-0.296138	-0.256553	0.184593	0.417069	0.359409	0.207991	0.092745
4.7	-0.269331	-0.279081	0.150573	0.407228	0.369293	0.221355	0.101676
4.8	-0.240425	-0.298500	0.116050	0.395208	0.377960	0.234725	0.111051
4.9	-0.209738	-0.314695	0.081292	0.381055	0.385307	0.248017	0.120850
5	-0.177597	-0.327579	0.046565	0.364831	0.391232	0.261141	0.131049
5.1	-0.144335	-0.337097	0.012140	0.346618	0.395647	0.274004	0.141616
5.2	-0.110290	-0.343223	-0.021718	0.326517	0.398468	0.286512	0.152516
5.3	-0.075803	-0.345961	-0.054748	0.304641	0.399625	0.298567	0.163708
5.4	-0.041210	-0.345345	-0.086695	0.281126	0.399058	0.310070	0.175147
5.5	-0.006844	-0.341438	-0.117315	0.256118	0.396717	0.320925	0.186783
5.6	0.026971	-0.334333	-0.146375	0.229779	0.392567	0.331031	0.198560
5.7	0.059920	-0.324148	-0.173656	0.202284	0.386586	0.340293	0.210420
5.8	0.091703	-0.311028	-0.198954	0.173818	0.378766	0.348617	0.222298
5.9	0.122033	-0.295142	-0.222082	0.144579	0.369111	0.355911	0.234127
6	0.150645	-0.276684	-0.242873	0.114768	0.357642	0.362087	0.245837
6.1	0.177291	-0.255865	-0.261182	0.084598	0.344393	0.367065	0.257352
6.2	0.201747	-0.232917	-0.276882	0.054283	0.329414	0.370767	0.268597
6.3	0.223812	-0.208087	-0.289871	0.024042	0.312768	0.373124	0.279493
6.4	0.243311	-0.181637	-0.300072	-0.005908	0.294534	0.374075	0.289958
6.5	0.260095	-0.153841	-0.307430	-0.035347	0.274803	0.373565	0.299913
6.6	0.274043	-0.124980	-0.311916	-0.064060	0.253680	0.371551	0.309276
6.7	0.285065	-0.095342	-0.313525	-0.091837	0.231283	0.367996	0.317965
6.8	0.293096	-0.065219	-0.312277	-0.118474	0.207742	0.362876	0.325900
6.9	0.298102	-0.034902	-0.308219	-0.143775	0.183197	0.356177	0.333002
7	0.300079	-0.004683	-0.301417	-0.167556	0.157798	0.347896	0.339197
7.1	0.299051	0.025153	-0.291966	-0.189641	0.131706	0.338042	0.344410
7.2	0.295071	0.054327	-0.279980	-0.209872	0.105087	0.326635	0.348573
7.3	0.288217	0.082570	-0.265595	-0.228102	0.078114	0.313706	0.351621
7.4	0.278596	0.109625	-0.248968	-0.244202	0.050966	0.299301	0.353494
7.5	0.266340	0.135248	-0.230273	-0.258061	0.023825	0.283474	0.354140
7.6	0.251602	0.159214	-0.209703	-0.269584	-0.003126	0.266293	0.353512
7.7	0.234559	0.181313	-0.187465	-0.278697	-0.029702	0.247838	0.351570
7.8	0.215408	0.201357	-0.163778	-0.285346	-0.055719	0.228198	0.348280
7.9	0.194362	0.219179	-0.138873	-0.289495	-0.080996	0.207474	0.343621
8	0.171651	0.234636	-0.112992	-0.291132	-0.105357	0.185775	0.337576
9	-0.090334	0.245312	0.144847	-0.180935	-0.265471	-0.055039	0.204316
10	-0.245936	0.043473	0.254630	0.058379	-0.219603	-0.234062	-0.014459
11	-0.171190	-0.176785	0.139048	0.227348	-0.015040	-0.238286	-0.201584
12	0.047689	-0.223447	-0.084930	0.195137	0.182499	-0.073471	-0.243725

С точки зрения наглядности интерес представляет создание математически точных графиков функций Бесселя в интервале, на котором обеспечивается сходимость приведенного выше алгоритма и программы. Хотя средства языка JavaScript не предоставляют возможностей работы с графикой как таковой и с векторными кривыми, оказалось возможным заменить этот недостаток другими средствами.



На рисунке вверху показан точный график функций Бесселя с 0 по 9 индексом в интервале от 0 до 20. Коэффициент растяжения графика по вертикали равен 4.

График этих функций был отрисован программой на мониторе компьютера без использования опорных точек, приближений и аппроксимаций. Расчеты производились для каждого отдельного пикселя исходного изображения, с шагом 1 px, причем одна единица по горизонтали или вертикали вмещала 100 пикселей (без учета растяжения).

Чтобы построить точное графическое изображение первых 10 функций Бесселя в интервале от 0 до 20, компьютер выполнил $(20 * 100) * 10 = 20\,000$ приближенных вычислений значений функций Бесселя, исходя из разложения в ряд без округления. Для расчета значения функции Бесселя выполнялось в среднем от 5 до 25 итераций, что суммарно составило 300 000 итераций.

Функции Бесселя индекса от до
 Интервал переменной от до единиц
 Коэффициент растяжения графика по вертикали
 Коэффициент растяжения графика по горизонтали

Величины индекса приводятся к целым неотрицательным значениям
 В базовом варианте 1 единица = 100 px, точность вычислений

График Фнк. Бесселя

Персональному компьютеру средней мощности и интернет-браузеру Mozilla Firefox в локальном режиме потребовалось около минуты для окончания вычислений и завершения полной отрисовки этих графиков. В то же время браузеры IE и Opera затратили на аналогичный процесс около 10-15 минут, при этом процесс самой отрисовки графиков был хорошо виден и нагляден.

На графиках видно, что функции Бесселя как бы сплетаются в жгут, который все плотнее прижимается к горизонтальной оси по мере роста аргумента и индекса.

К достоинствам приводимого алгоритма относится математическая точность, универсальность и наглядность, возможность сохранить результат на компьютере из браузера в виде файла. К недостаткам — достаточно большой объем файла и замедленная скорость отрисовки его браузерами.

Следующая программа производит построение графиков для функций Бесселя с заданными целыми индексами и заданным интервалом. Рекомендуется создать текстовый файл с именем и расширением **GraphBessel.html**

```
<html>
<head>
<title>Функции Бесселя :: построение графиков</title>

<script type="text/javascript">
/* функция вывода графика фнк. Бесселя */
function GraphBessel()
{
    /* Открывается новое окно */
    var msgWindow = Math.random() * 1000000;
    msgWindow = Math.floor(msgWindow);
    MsgBox = window.open("",msgWindow,"toolbar=yes,location=yes,scrollbars=yes,directories=yes,status=yes,menu
bar=yes,resizable=yes");

    /* Вывод заголовка веб-страницы */
    MsgBox.document.writeln("<html><head><title>Функции
Бесселя :: график</title>");
    MsgBox.document.writeln("<meta http-equiv='content-
type' content='text/html; charset=windows-1251' />");
    MsgBox.document.writeln("<style>div { position:
absolute; } body { font-family: verdana, arial,
helvetica, sans-serif; font-size: 10pt; } </style></
head>"); MsgBox.document.writeln("<body>");
```

```

var step = 100;
var x1 = Math.abs(document.form5.iks1.value);
var x10 = Math.floor(x1);
var x2 = Math.abs(document.form5.iks2.value);
var x20 = Math.floor(x2);
var eps = Math.abs(document.form5.eps.value);
var n = Math.floor(document.form5.index.value);
var m = Math.floor(document.form5.index1.value);
var koeff = Math.floor(Math.abs(document.form5.koeff.
value));
if (koeff == 0) koeff = 1;
var koeffg = Math.floor(Math.abs(document.form5.koeffg.
value));
if (koeffg == 0) koeff = 1;

/* Построение координатных осей */
MsgBox.document.writeln("<div style='top: 40px;
left: 50px;'><table cellpadding='0' cellspacing='0'
style='width: 1px; height: ",(20 + koeff * 200),"px;
background-color: #5a7381;'><tr><td></td></tr></table></div> <div style='top: 50px; left:
45px;'><table cellpadding='0' cellspacing='0'
style='width: 10px; height: 1px; background-
color: #5a7381;'><tr><td></td></tr></table></div>
<div style='top: ",(50 + koeff * 200),"px; left:
45px;'><table cellpadding='0' cellspacing='0'
style='width: 10px; height: 1px; background-color:
#5a7381;'><tr><td></td></tr></table></div> ");

var ii = 1;
for (ii = x10; ii < (x20 + 1); ii++)
{
MsgBox.document.writeln("<div style='font-size:
8pt; color: #5a7381; left: ",(52 + (ii - x10) * 100 *
koeffg),"px; top: ",(60 + koeff * 100),"px;'>",ii,"</
div>");

MsgBox.document.writeln("<div style='top: ",(45
+ koeff * 100),"px; left: ",(50 + (ii - x10) * 100 *
koeffg),"px;'><table cellpadding='0' cellspacing='0'
style='width: 1px; height: 10px; background-
color: #5a7381;'><tr><td></td></tr></table></div>
<div style='top: ",(50 + koeff * 100),"px; left:
",(50 + (ii - x10) * 100 * koeffg),"px;'><table
cellpadding='0' cellspacing='0' style='width: ",
(100 * koeffg),"px; height: 1px; background-color:
#5a7381;'><tr><td></td></tr></table></div>");
}

```

```

/* Цвета для раскраски графиков */
var c = new Array ("ff0000","0000ff","009900",
"b600b6","3399cc","8800ff","12be8f","fb1da1","c8a283",
"f26521");

if (m < n) { var nn = m; m = n; n = nn; }
if (x2 < x1) { var xx = x2; x2 = x1; x1 = xx; }

var Posx = 50;
var Posy = koeff * 100 + 50;
var y = x = 0;
var yJ = xJ = 0;
var y1 = y0 = Posy;

var Bessel0 = Bessel = 0;
var DimY0 = DimY = 1;

var r = j1 = j = i = 0;
var Maxx = Math.floor((x2 - x1) * step * koeffg);

/* Построение графика */
for (j = n; j <= m; j++)
{
j1 = j - n;
while (j1 > 9) j1 = j1 - 10; /* цвет графика */

xJ = j1 * 90 + Posx;
yJ = Posy * 2 + (j - n - j1) * 3;

/* название функции выбранным цветом */
MsgBox.document.writeln("<div style='color:
#",c[j1],"; top: ",yJ,"px; left: ",xJ,"px; height:
50px;'>J<sub>",j,"</sub>(x)</div>");

DimY = 1;
Bessel0 = NNBessel(x1,j,eps);
Bessel = NNBessel(x1 + 1 / step,j,eps);
if (Bessel0 < Bessel) r = 1; else r = -1;

y0 = Posy - Math.round(Bessel0 * step * koeff);
y = Posy - Math.round(Bessel * step * koeff);
x = Posx + x1 * step;

/* строка состояния */
MsgBox.document.writeln('<script type="text/
javascript">window.status=("Выполняется итерация
для индекса n = '+j+' и аргумента x = '+x1+' !!
")</'+script+'>');

```

```

    MsgBox.document.writeln("<div style='top:
    ",y,"px; left: ",(x - x10 * 100),"px;'><table
    cellpadding='0' cellspacing='0' style='width:
    1px; height: ",DimY,"px; background-color:
    #",c[j1],";'><tr><td></td></tr></table></div>");

    DimY0 = DimY; y0 = y;
    if (Bessel0 < Bessel) r = 1; else r = -1;

    for (i = 1; i <= Maxx; i++)
    {
        x = i / (step * koefg) + x1;
        /* вызов вычисления значения функции */
        Bessel = NNBessel(x,j,eps);
        if (Bessel0 < Bessel) r = 1; else r = -1;

        x = Math.round (x * step) / step;
        MsgBox.document.writeln('<script type="text/
        javascript">window.status=("Выполняется итерация
        для индекса n = '+j+' и аргумента x = '+x+' !!
        ")</'+script+'>');
        x = Posx + i + x1 * step;
        x = Math.round(x);
        y = Posy - Math.round(Bessel * step * koeff)

        DimY = 1;
        if (r > 0)
            { if (y0 > (y + 1)) DimY = y0 - y; y1 = y; }

            else { if (y0 < (y + 1)) DimY = y - y0;
            y1 = y - DimY; }

        /* Вывод 1px фрагмента графика функции */
        MsgBox.document.writeln("<div style='top:
        ",y1,"px; left: ",(x - x10 * 100),"px;'><table
        cellpadding='0' cellspacing='0' style='width:
        1px; height: ",DimY,"px; background-color:
        #",c[j1],";'><tr><td></td></tr></table></div>");

        DimY0 = DimY; y0 = y; Bessel0 = Bessel;
    }

    /* Закрытие веб-страницы в новом окне */
    MsgBox.document.writeln("</body></html>");
    MsgBox.document.close();
}
/* окончание текста функции вывода графика */

```

```

function NNBessel(x,n,eps)
/* скопировать текст функции со стр. 126-127 */
/* на этом месте может быть любая другая функция */

```

```

</script>
</head>
<body>
<!-- Начало отрисовки формы запроса -->
<form method="post" name="form5" id="form5">

```

```

Функции Бесселя индекса от <input type="text"
name="index" id="index" style="width: 50px; height:
22px; border:#5a7381 1px solid;"> до <input
type="text" name="index1" id="index1" style="width:
50px; height: 22px; border:#5a7381 1px solid;">

```

```

<br />Интервал переменной от <input type="text"
value="0" name="iks1" id="iks1" style="width: 50px;
height: 22px; border:#5a7381 1px solid;"> до <input
type="text" name="iks2" id="iks2" style="width: 50px;
height: 22px; border:#5a7381 1px solid;"> единиц

```

```

<br />Коэффициент растяжения графика по вертикали
<input type="text" value="1" name="koeff" id="koeff"
style="width: 50px; height: 22px; border:#5a7381 1px
solid;">

```

```

<br />Коэффициент растяжения графика по горизонтали
<input type="text" value="1" name="koefg" id="koefg"
style="width: 50px; height: 22px; border:#5a7381 1px
solid;">

```

```

<br /><br />Вводимые величины индекса приводятся к
целым неотрицательным значениям
<br />В базовом варианте 1 единица = 100 px,
точность вычислений <input type="text" value="1E-6"
name="eps" id="eps" style="width: 50px; height: 22px;
border:#5a7381 1px solid;">

```

```

<br /><br /><input type="button" value="График фнк.
Бесселя" onClick="GraphBessel()" style="width: 180px;
height: 22px; border:#5a7381 1px solid;">

```

```

</form>
</body></html>

```

Можно заметить, что большую часть текста программы занимает оформление вывода математически точного и корректного (по-точечного) графика функций в среде, где отсутствуют графические и векторные средства.

Таким образом можно выводить на монитор компьютера таблицы и графики средствами JavaScript — достаточно изменить выделенный фрагмент текста функции математического расчета. В теле самой функции квадратной скобкой отмечен фрагмент, который необходимо изменить, если нужно вычислить значение какой-либо другой функции с другим разложением в ряд. Программы носят модульный характер, поэтому в дальнейшем будут приводиться только отдельные фрагменты, подлежащие замене.

Программа 2. Вычисление значений функций Бесселя при произвольных значениях индекса на базе ранее полученного разложения в ряд

$$J_{\mp\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\mp\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k! \Gamma(\mp\nu + k + 1)} \quad (2.5.7)$$

Будем считать, что при целых отрицательных значениях индекса выполняется следующее равенство:

$$J_{\nu}(x) = -J_{-\nu}(x) \quad \nu — \text{целое неотрицательное}$$

В соответствии с (2.5.8) начальный член ряда разложения функций Бесселя вычисляется по формуле:

$$a_0 = \left(\frac{x}{2}\right)^{\mp\nu} \frac{1}{\Gamma(\mp\nu + 1)} \quad (4.2.3)$$

Каждый последующий член этого ряда может быть вычислен в соответствии с рекуррентным отношением:

$$a_k = a_{k-1} \frac{(-1) (x/2)^2}{k(\mp\nu + k)} \quad (4.2.4)$$

Для правильных вычислений и расчета начального (нулевого) значения итерации потребуются вычисление значения Гамма-функции Эйлера.

Применение численных методов для расчетов значений Гамма-функции Эйлера имеет специфику в связи с тем, что вблизи нуля и целых отрицательных чисел Гамма-функция Эйлера имеет неустранимые особенности и терпит неустранимый численными методами разрыв, устремляясь на бесконечность.

Соответственно, и значения Гамма-функции не могут быть получены путем численных методов не только в указанных особых точках, но и в их ближайших окрестностях. В то же время при натуральных значениях переменной Гамма-функция Эйлера превращается в привычный факториал, расширением которого она является.

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (4.2.5)$$

Из этого следует, что для корректного применения численных методов при значениях индекса функции Бесселя, близких к целым отрицательным числам, функции Бесселя необходимо заменять на соответствующие целочисленные функции Неймана, вычисление которых более сложное и будет рассмотрено в следующем параграфе.

Функции Бесселя со значениями индекса вблизи нуля необходимо заменять на функции Бесселя с нулевым индексом. Функции Бесселя со значениями индекса вблизи натуральных чисел необходимо заменять на функции Бесселя с натуральным индексом и явно использовать классические функции Бесселя с натуральным индексом, проверенные и устойчивые программы их вычислений и хорошо сходящиеся ряды именно для них.

Для программного вычисления значений Гамма-функции Эйлера используется ее базовое представление в виде несобственного интеграла (Эйлера интеграла 2 рода).

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{где } x > 0 \quad (4.2.6)$$

Для вычисления значения этого интеграла будем использовать конечные суммы Дарбу и конечный интервал. Запишем следующее конечное представление:

$$\Gamma(x) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ dt \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n e^{-t_k} t_k^{x-1} dt \quad \text{где } t_k = k dt \quad \text{и } x > 1 \quad (4.2.7)$$

Одним из основных свойств Гамма-функции Эйлера является фундаментальное соотношение:

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \quad (4.2.8)$$

$$\Gamma(x-1) = \Gamma(x) / (x-1) \quad (4.2.9)$$

Благодаря этому фундаментальному свойству можно вычислить значение функции при отрицательных значениях переменной, сделав соответствующую поправку.

```
<script type="text/javascript">
function GammaFunction(x)
{
    var n = 1000;      /* итерации не увеличивать */
    var dt = 1E-1;     /* шаг итераций не увеличивать */
    var Emin = 1E-3;   /* погрешность отклонения */
    var flag = 0;      /* принадлежность к области сходимости */
    var i = ss = s = 0;
    var xr = Math.round(x);

    /* близко к отрицательным целым числам и нулю */
    if ((Math.abs(x - xr) < Emin) && (x < dt)) return s;

    /* приведение к области хорошей сходимости */
    while (x < 4)
    {
        flag = ++flag; /* flag = flag + 1 */
        x = ++x;       /* x = x + 1 */
    }
    /* вычисление суммы Дарбу для интеграла Эйлера */
    var ti = 0;
    xr = x - 1;
    for (i = 1; i <= n; i++)
    {
        ti = i * dt;
        s = s + dt * Math.pow(ti, xr) * Math.exp(-ti);
    }
    /* вычисление на области плохой сходимости */
    while (flag > 0)
    {
        x = --x;      /* x = x - 1 */
        flag = --flag; /* flag = flag - 1 */
        s = s / x;
    }
    return s;
}
</script>
```

Вблизи отрицательных целых чисел программа вычислений возвращает ноль, так как функция на этом множестве численными методами не определена.

Примечательно, что отрицательные значения Гамма-функции Эйлера, которые вычисляются по настоящему алгоритму, содержат относительно высокие погрешности. В окрестности нуля погрешности еще более высоки. При больших отрицательных значениях вычисления по этому алгоритму теряет смысл, так как график функции напоминает букву П.

Наилучшая сходимость наблюдается на области значений переменной (4..5), наихудшая — около единицы и при больших значениях переменной. При значениях меньше единицы суммирование использовать нельзя — переменную нужно привести вначале к области сходимости.

Хорошая устойчивость программы наблюдается только при небольших положительных значениях переменной, превышающих значение 3, но лучше всего этот алгоритм сходится, начиная с 4. В этом случае можно ограничиться сравнительно небольшим числом итераций. Поэтому вычисления в ряд в этой программе начинаются с числа 4, а все меньшие значения приводятся по формуле (4.2.9).

Настоящий алгоритм является расходящимся, то есть при росте числа итераций n и уменьшении шага dt не наблюдается заметное улучшение результатов вычислений на 32-разрядных приложениях. Более того, результат может ухудшиться, а время работы — возрастает вплоть до полной блокировки работы приложения (при превышении каждого из указанных параметров более чем в 100 раз).

Приведенные параметры n и dt были выявлены опытным путем, они обеспечивают очень быстрый и максимально точный расчет сложного алгоритма, который в дальнейшем будет использоваться и для вычисления значений функций Бесселя с нецелым индексом, и для расчета второго линейно-независимого решения уравнения Бесселя — функций Неймана произвольного индекса.

Для удобства можно вывести значения Гамма-функции Эйлера в форме таблицы, которые были вычислены при помощи настоящего алгоритма без округлений и поправок. Время вычислений и вывода на монитор на компьютере средней мощности — всего несколько секунд.

Хотя вычисление Гамма-функции Эйлера и соответственно обобщенного функционала включено в ряд математических пакетов, автор сочла необходимым подробно разобрать алгоритм вычислений и показать на примерах его особенности в стандартных 32-разрядных приложениях.

Приведем алгоритм и программу вычислений значений функций Бесселя с произвольным индексом, в том числе нецелым и отрицательным.

```
<script type="text/javascript">
function Bessel(x,ind,eps)
{
    var Emax = 1E-12; /* максимальная погрешность */
    var Emin = 1E-6;  /* минимальная погрешность */

    if (x == null) x = 0;      /* переменная */
    if (ind == null) ind = 0;  /* индекс функции */
    if (eps == null) eps = Emin;
    eps = Math.abs(eps);

    /* далее исправления и коррекция запрещены */
    if (eps > Emin) eps = Emin; /* исправления */
    if (eps < Emax) eps = Emax;
    x = Math.abs(x);

    var ak = 1; /* переменные итерации */
    var s = 0; /* переменные - сумма ряда */
    var k = 0; /* нумерация членов ряда */
    var i = 1;

    /* близость индекса к целым числам */
    var indr = Math.round(ind);
    if (Math.abs(ind - indr) < Emin)
    { s = NNBessel(x,indr,eps);
      if (ind < 0) s = -s;
      return s;
    }

    /* вызов Гамма-функции Эйлера */
    var gamma = GammaFunction(ind+1);

    /* вычисление нулевого члена ряда */
    ak = Math.pow((x/2),ind) / gamma;
```

```
/* вычисления ряда с заданной погрешностью */
while (Math.abs(ak) > eps)
{
    s = s + ak;
    k = k + 1;
    ak = (-1) * ak * x * x / (4 * k * (ind + k));
}

/* исправление погрешности и расходимости */
if (Math.abs(s) < Emax) s = 0;
if (Math.abs(s) > 1) s = 0;

/* возврат полученного значения суммы ряда */
return s;
}
</script>
```

Приведенный алгоритм использует прямое вычисление значений функций Бесселя в малой окрестности целых значений индекса. Это обеспечивает существенное повышение точности при вычислениях наиболее популярных в практических приложениях функций.

На практике часто приходится сталкиваться с вычислениями значений функций Бесселя с целым неотрицательным индексом или индексами, очень близкими к целым. Этим можно ограничиться, если нет особенностей.

В случае особенностей и необходимости использовать второе линейно-независимое решение уравнения Бесселя с целым значением индекса программа выдает линейно-зависимое решение, отличающееся только на знак. Поэтому в этом случае математические расчеты требуют обязательного вычисления значений функций Неймана, которые будут рассмотрены в следующем параграфе.

Невзирая на то, что программа позволяет легко вычислять значения функций Бесселя при отрицательных нецелых значениях индекса, использовать эти значения в качестве элемента разложения по второму линейно-независимому решению уравнения Бесселя на практике не рекомендуется. При построении точных математических моделей сложных процессов с особенностями функции Бесселя с отрицательным значением индекса не обеспечивают корректность моделирования физических процессов.

§ 3. Программное вычисление функций Неймана

В специальной литературе функциям Неймана уделяется меньше внимание, чем функциям Бесселя, образующим первое линейно-независимое решение уравнения Бесселя.

В прикладных задачах функции Неймана чаще всего играют вспомогательную роль, позволяя более корректно моделировать физические процессы, связанные с волнами, колебаниями, изгибом, прочностью, нагреванием, остыванием и пр., в окрестности имеющих особенности.

В ряде аннотаций к стандартным математическим пакетам функции Неймана призываются использовать только в крайних случаях, если без них невозможно построение корректной математической модели. В некоторых пакетах программы вычислений функций Неймана и вовсе отсутствуют.

Это связано в первую очередь с пережитками компьютерной эры середины и конца XX века, когда вычисления были связаны с объективными факторами — малым парком реальных ЭВМ, дорогим и ограниченным машинным временем, низкой разрядностью большинства приложений, малой скоростью выполнения программ, сложностью хранения данных на носителях и т.д.

Проблемы оказались почти полностью устранены уже в начале XXI века, когда реальные математические расчеты большинства прикладных задач стало возможно проводить на персональных компьютерах средней мощности. А ведь еще каких-то 40-50 лет назад для таких расчетов задействовались самые мощные ЭВМ класса ЕС.

Существенной проблемой оказалось то, что большинство прикладных программ и алгоритмов были написаны на языке Фортран, который на персональных компьютерах используется крайне редко, а доступные библиотеки программ пока мало распространены, но их создание реально.

В свете научно-технического прогресса проблема и сложность вычислений функций Неймана оказывается не столь острой — приведенные далее в настоящем параграфе программы позволяют выполнить расчеты на персональном компьютере в стандартных интернет-приложениях. Перед этим сделаем небольшое отступление.

В связи с этим автора заинтересовала возможность использования функций Неймана как таковых, без привлечения классических функций Бесселя, для корректного математического моделирования экстраординарных и необычных физических процессов, в т. ч. не разгаданных.

Исторически так сложилось, что цилиндрические функции и в частности функции Неймана вначале разрабатывались в теории как интересный математический аппарат, и только потом они нашли свое широкое применение в сфере прикладных вычислений и корректного компьютерного математического моделирования.

Функции Неймана почти на всей области определения (то есть почти на всей положительной числовой полуоси) ведут себя практически так же, как и классические функции Бесселя. Качественным отличием является их поведение вблизи нуля, где функции Неймана резко устремляются на бесконечность и терпят неустранимый разрыв.

Более того, в малой окрестности нуля получение значений функций Неймана численными методами невозможно. Эта особенность ранее создавала сложности практического применения функций Неймана, так как нужно было исключать из рассмотрения некоторую окрестность нулевого значения переменной и проводить много вычислений.

Одной из характерных особенностей XXI века является бурное развитие технологий трехмерной компьютерной визуализации и перенос этих технологий на персональные компьютеры. Благодаря этому на компьютерах оказалось возможным изобразить практически любой процесс, в том числе не существующий в природе. С визуальной точки зрения картинка и видеоряд будет выглядеть реалистично и псевдо-правдоподобно.

Автор имеет некоторый опыт работы в трехмерных компьютерных приложениях, предназначенных для визуализации объектов. Эти пакеты имеют широчайший спектр возможностей компьютерного визуального моделирования и реалистичного изображения практически всего, чего угодно. Трехмерная модель строится, исходя в первую очередь из общей эстетики и привлекательного дизайна.

Современные компьютерные специалисты создают очень наглядные и красивые компьютерные модели различных природных явлений, в том числе для масштабных фильмов-катастроф и художественно-документальных фильмов.

Основная задача этих моделей — произвести эмоциональное впечатление на зрителей и создать у них эффект присутствия и эмоционального потрясения, что обеспечивает коммерческий успех и высокие кассовые сборы.

Совершенно не существенно, что эти явления в природе выглядят не так, как в художественном видеоряде — у фильмов совсем другая задача. На экране могут ожить несуществующие торнадо, смерчи и цунами, которые на документальных фотографиях и на съемках очевидцев выглядят намного проще, прозаичнее и вообще иначе.

Поэтому стоит серьезная проблема построения корректной математической модели еще не смоделированных сложных природных процессов или создания для ряда процессов более эффективных математических моделей.

Одно из таких сложных для прикладного моделирования явлений — цунами. На сегодня разработан качественный математический аппарат общей теории волн, поэтому на компьютере стали возможны визуально-корректные отрисовки волновых процессов, в частности — любых волн на поверхности океана и прибрежных волн.

В популярных фильмах-катастрофах цунами визуально моделируют как очень большую и даже гигантскую волну, которая поднимается вверх и сметает все на своем пути. Протообразом этой модели послужили прибрежные волны на тропических побережьях, но это производит огромное впечатление на экране и притупляет чувство опасности при приближении реального цунами.

Однако цунами — это не волна в привычном понимании. Цунами не поддается описанию классических волновых законов и процессов, хотя моделируется в том числе классическим волновым уравнением.

Цунами — это реализованная в природе особенность волновых процессов, так называемая водная океаническая ударная волна, которая не имеет ничего общего с обычными (пусть даже и очень сильными) штормовыми волнами.

В теории любая ударная волна описывается соответственно не гладкими колебательными функциями, а функциями скачка и дельта-функцией. Основной сложностью является построение прикладных аппроксимаций этих функций для данного природного катаклизма.

Цунами черпает энергию не в движении воздушных масс у поверхности океана, а в силе землетрясений, вызванных постоянными поддвижками литосферных плит.

Американский континент постоянно дрейфует в сторону Азии приблизительно на 15-20 см в год, образуя в земной коре зоны деформаций, разрывов и сжатий. Возникают землетрясения, высвобождая эту гигантскую энергию. Дрейф осуществляется под действием колоссальной движущей силы — энергии вращения Земли вокруг своей оси.

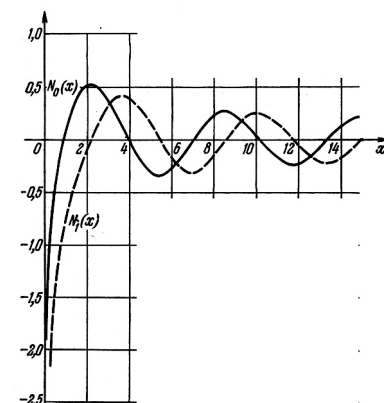
В океане высвобожденная энергия Земли распространяется более глобально по сравнению со штормовыми волнами, носящими локальный характер, создавая так называемые приливные волны или цунами, которые необходимо рассматривать как глобальный процесс, происходящий на нашей планете.

Для моделирования поведения цунами и аппроксимации автор предлагает использовать функции Неймана как таковые, так как они имеют характерную для ударной волны неустранимую особенность, локализованную в малой окрестности.

В случае огромных энергий и больших скоростей распространения волновых колебаний возникают разрывы непрерывности в распределении давления, скорости, плотности и других величин. Эти разрывы принято называть ударными волнами. Но на поверхности разрыва (фронте ударной волны) должны выполняться условия непрерывности самого потока вещества, энергии и количества движения (условия Гюгонио).

То есть с физической точки зрения процесс остается непрерывным, а разрыв терпят только функции математической модели.

Аномалии поведения цунами проявляются только на границе океана (зоны распространения цунами) — на океаническом дне, побережье и вблизи берега.



Графики функций Неймана $N_0(x)$ и $N_1(x)$

Разрушительные проявления цунами начинаются на океаническом шельфе. Именно там происходит образование ударной волны. В океане же цунами выглядит как огромная пологая волна высотой около метра, не представляющая опасности для надводного судоходства.

Еще одним интересным с точки зрения математического моделирования и не менее разрушительным природным явлением являются смерчи, торнадо и тропические тайфуны, имеющие характерную воронкообразную форму.

Они постоянно привлекают к себе внимание исследователей и теоретиков. Свою энергию они черпают от энергии излучения мощной звезды — Солнца, и несут в себе также энергию вращения Земли.

Смерч (торнадо) — атмосферный вихрь, возникающий в грозовом облаке и распространяющийся вниз, часто до самой поверхности Земли в виде темного облачного рукава или хобота диаметром в десятки и сотни метров. Существует недолго, перемещаясь вместе с облаком.

Водяные смерчи — это вращающиеся столбы поднимающегося влажного воздуха, которые обычно образуются над теплой водой. Они могут быть так же опасны, как торнадо, скорость ветра в них может превышать 200 километров в час. Часто водяные смерчи не связаны с грозами и возникают даже при сравнительно хорошей погоде.

В центральной части смерча давление воздуха понижено. Внешне смерч представляется опускающимся вершиной к земле конусообразным облачным столбом или хоботом. От поверхности земли к нему часто поднимается вершиной вверх другой столб — из пыли, мусора или водяных брызг. Диаметр столба — несколько десятков метров. Движение воздуха и вовлекаемых в него предметов — круговое, со скоростью до 100 км/ч, а иногда и больше. Воздух в смерче увлекается вверх по спирали, поднимая с собой воду, пыль и даже различные предметы на огромную высоту.

При движении над местностью со скоростью несколько десятков километров в час смерч производит разрушения, вызываемые не только огромной скоростью воздуха внутри самого вихря, но и мгновенным скачком атмосферного давления, которое за считанные секунды может упасть и снова подняться на несколько десятков гектопаскалей. Дома взрываются в момент прохождения над ними смерча.

При построении математической модели существенную роль играет правильный выбор системы координат и ее ориентации в пространстве.

Если исключить действие оператора изгиба на столб торнадо, то двумерная проекция смерча близка к приведенным на иллюстрации функциям Неймана.

Воздух вращается по спирали, поднимаясь вверх. В двумерной проекции это с высокой степенью точности напоминает абрисы цилиндрической функции Неймана, к которой добавлен оператор вращения вокруг центра не изогнутого торнадо. Это позволяет сделать предположение о том, что смерчи могут быть с высокой степенью точности и реализма смоделированы с использованием именно специальных функций Неймана как основного элемента разложения.

Краткое рассмотрение этих двух примеров показывает, что функции Неймана играют не менее существенную роль в математическом моделировании, чем классические функции Бесселя, и поэтому им должно уделяться не меньше внимание, чем другим специальным функциям.

Функции Неймана способны играть не только вспомогательную, но и ведущую роль в математическом моделировании различных процессов, носящих в том числе аномальный или парадоксальный характер.

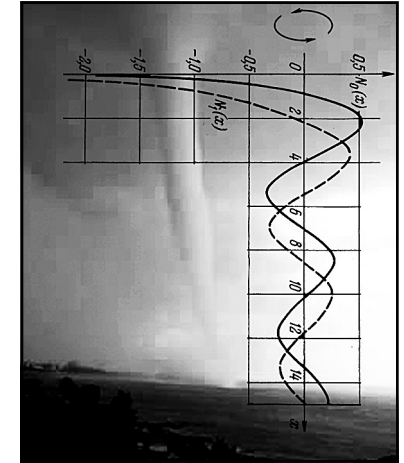
Для того, чтобы облегчить процесс вычисления численных значений функций Неймана, приводим алгоритм и программу, написанную на языке JavaScript.

Для нецелых значений индекса функции Неймана могут быть вычислены по известной формуле:

$$\mathcal{N}_\nu(x) = (J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)) / \sin \nu\pi$$

для нецелых значений $\nu \geq 0$

(4.3.1)
153



Программа 3. Вычисление значений функций Неймана при нецелых значениях индекса на базе ранее полученного разложения в ряд функций Бесселя

$$J_{\mp\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\mp\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k! \Gamma(\mp\nu + k + 1)} \quad (2.5.7)$$

В соответствии с (3.3.1) начальный член ряда разложения функций Неймана вычисляется по формуле:

$$a_0 = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \cos \nu\pi / \sin \nu\pi \quad (4.3.2)$$

$$b_0 = -\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \frac{1}{\Gamma(-\nu + 1)} / \sin \nu\pi$$

Каждый последующий член этого ряда может быть вычислен в соответствии с рекуррентным отношением:

$$a_k = a_{k-1} \frac{(-1) (x/2)^2}{k(\nu + k)} \quad (4.3.3)$$

$$b_k = b_{k-1} \frac{(-1) (x/2)^2}{k(-\nu + k)}$$

$$\mathcal{N}_{\nu}(x) = \sum_{k=0}^n a_k + b_k \text{ для нецелых } \nu \geq 0 \quad (4.3.4)$$

Для правильных вычислений и расчета начального (нулевого) значения итерации потребуется вычисление значения Гамма-функции Эйлера, приведенное на стр. 144. Запишем программу вычислений на языке JavaScript.

```
<script type="text/javascript">
function Nejman(x, ind, eps)
{
    var Emax = 1E-12; /* максимальная погрешность */
    var Emin = 1E-6;  /* минимальная погрешность */

    if (x == null) x = 0;          /* переменная */
    if (ind == null) ind = 0.5;    /* индекс */
```

```
    if (eps == null) eps = Emin;
    eps = Math.abs(eps);
    var Xmax= 50;          /* максимально допустимый x */

    /* далее исправления и коррекция запрещены */
    if (eps > Emin) eps = Emin; /* исправления */
    if (eps < Emax) eps = Emax;
    x = Math.abs(x);

    var ak = bk = 1; /* переменные итерации */
    var s = 0;        /* переменные - сумма ряда */
    var k = 0;        /* нумерация членов ряда */
    var i = 1;

    /* опасная близость переменной x к нулю */
    if (x < Emin) return s;

    /* близость индекса к целым числам */
    var indr = Math.round(ind);
    if (Math.abs(ind - indr) < Emin)
        { s = NNNejman(x, indr, eps);
          if (ind < 0) s = -s;
          return s;
        }

    /* вычисление нулевого члена ряда */
    var pi = Math.PI;

    var gamma = GammaFunction(ind+1);
    ak = Math.pow((x/2), ind) / gamma * Math.cos(ind * pi)
    / Math.sin(ind * pi);

    gamma = GammaFunction(-ind+1);
    bk = Math.pow((x/2), -ind) / gamma / Math.sin(ind * pi);

    /* вычисления ряда с заданной погрешностью */
    while ((Math.abs(ak) > eps) || (Math.abs(bk) > eps))
    {
        s = s + ak + bk;
        k = k + 1;
        ak = (-1) * ak * x * x / (4 * k * (ind + k));
        bk = (-1) * bk * x * x / (4 * k * (-ind + k));
    }
```

```

/* исправление погрешности и расходимости */
if (Math.abs(s) < Emax) s = 0;
if ((Math.abs(s) > 1) && (x > Xmax)) s = 0;

/* возврат полученного значения суммы ряда */
return s;
}
</script>

```

Приведенная программа является неустойчивой при больших значениях модуля индекса (от 25 и выше) и больших значениях переменной (ориентировочно от 50 и выше). Чем больше значение индекса и чем больше значение переменной, тем менее устойчивой является программа.

В малой окрестности нуля значение функции также не определено в связи с наличием неустраняемой особенности и стремлению значения функции к бесконечности.

Очевидно, что приведенная выше программа очень схожа с программой вычисления значений функций Бесселя произвольного индекса и была написана на ее основе.

Но эта программа и используемый в ней алгоритм не предназначены для вычисления значения функции Неймана с целым неотрицательным индексом.

Целые значения индекса цилиндрических функций чаще всего применяются в практическом математическом моделировании процессов с особенностями. В то же время вычисления значений функций Неймана с целочисленными индексами представляет наибольшие сложности. Еще 50 лет назад эти вычисления могли быть выполнены на ограниченном парке ЭВМ с большой затратой машинного времени.

Программа вычислений этих значений отдельно вызывается в теле с именем **NNNejman** и приводится ниже. Ее обязательно нужно включить в тело веб-страницы вместе с программой вычисления значений функций Бесселя с целочисленными значениями индекса **NNBessel**.

Программа 4. Вычисление значений функций Неймана при целых неотрицательных значениях индекса производится на основании достаточно сложных формул и громоздких представлений в виде рядов. Сложность вычислений способствует накоплению погрешностей.

Функции Неймана для целого индекса в общем случае имеют вид следующего сложного ряда:

$$\mathcal{N}_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \left(\ln \frac{x}{2} + C \right) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{2} \right)^n \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(k-1)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{-n+2k-2} \quad (2.6.6)$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k!(k+n)!} \left(\sum_{m=1}^{n+k} \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right) \quad (4.3.5)$$

где C — постоянная Эйлера, приближенное значение которой составляет 0,577 215 664 901 532 5...

Алгоритмизации подлежит вычисление трех основных типов рядов, применяемых в данной формуле. Оценке погрешности подлежит остаточный член последнего ряда, так как первые два ряда конечны. В конце вычислений будет произведено деление итоговой суммы на константу π . Для вычислений дополнительно потребуется вызов расчета функции Бесселя с целым индексом.

$$a_1 = \left(\frac{x}{2} \right)^{-n} (n-1)! \quad \text{или} \quad 0 \quad \text{при} \quad n=0 \quad (4.3.6)$$

$$a_k = a_{k-1} \frac{(n-k)}{(k-1)} \left(\frac{x}{2} \right)^2$$

$$b_1 = - \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2} \frac{1}{(1+n)!}$$

$$b_k = -b_{k-1} \frac{1}{k(k+n)} \left(\frac{x}{2} \right)^2$$

$$c_k = \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \quad \text{и} \quad d_k = b_k (c_k + c_{n+k})$$

На основании этих рекуррентных отношений можно записать алгоритм и программу вычисления функций Неймана целочисленного индекса.

```

<script type="text/javascript">
function NNNejman(x,n,eps)
{
    var Emax = 1E-12; /* максимальная погрешность */
    var Emin = 1E-6;  /* минимальная погрешность */

    if (x == null) x = 0;          /* переменная */
    if (n == null) n = 0;          /* индекс */
    if (eps == null) eps = Emin;
    eps = Math.abs(eps);

    /* далее исправления и коррекция запрещены */
    if (eps > Emin) eps = Emin; /* исправления */
    if (eps < Emax) eps = Emax;

    x = Math.abs(x);
    n = Math.abs(n); /* округление индекса */
    n = Math.floor(n);

    var ak = bk = ck = dk = 0;
    var s = sc = sa = sb = 0; /* сумма рядов */
    var k = m = 0;           /* нумерация */
    var i = 1;
    var nf = 1;
    var pi = Math.PI;
    var eiler = 5.772156649015325E-1;
    var c = new Array(0,1);

    /* опасная близость переменной x к нулю */
    if (x < Emin) return s;

    /* вычисление факториала (n-1)! */
    for (i = 1; i < n; i++) nf = nf * i;

    /* заполнение таблицы значений c[k] */
    for (m = 2; m <= n; m++)
    { ck = c[m - 1] + 1 / m;
      /* добавление элемента ck в конец таблицы */
      c.push(ck);
    };

    /* вычисление первого конечного ряда */
    if (n > 0) sc = -Math.pow((x / 2), n) / nf / n * c[n];

```

```

/* начальные итерации второго ряда */
if (n > 0) sa = ak = Math.pow((x / 2), -n) * nf;

/* вычисление второго конечного ряда */
for (k = 1; k <= n; k++)
{ ak = ak * (n - k) * x * x / 4 / (k - 1);
  sa = sa + ak;
}

/* начальные итерации третьего бесконечного ряда */
ck = c[n] + 1 / (n + 1);
c.push(ck);
k = 1;
bk = -Math.pow((x / 2), (n + 2)) / nf / n / (n + 1);
sb = dk = bk * (c[1] + c[n + 1]);

/* вычисление третьего бесконечного ряда */
while (Math.abs(dk) > eps)
{
    k = 1 + k;
    ck = c[n + k - 1] + 1 / (n + k);
    c.push(ck);

    bk = -bk * x * x / 4 / k / (n + k);
    dk = bk * (c[k] + c[k + n]);
    sb = sb + dk;
}

/* конечный результат */
s = (2 * NNbessel(x,n,(eps * 1E-1)) * (Math.log(x /
2) + eiler) - sc - sa - sb) / pi;

/* исправление погрешности и расходимости */
var Xmax = 50;
if (Math.abs(s) < Emax) s = 0;
if ((Math.abs(s) > 1) && (x > Xmax)) s = 0;

/* возврат полученного значения суммы ряда */
return s;
}
</script>

```

Приведенная программа является неустойчивой при больших значениях модуля индекса (от 25 и выше) и боль-

ших значениях переменной (ориентировочно от 50 и выше). Чем больше значение индекса и чем больше значение переменной, тем менее устойчивой является программа. В малой окрестности нуля значение функции также не определено в связи с наличием неустранимой особенности и стремлению значения функции к бесконечности, поэтому приведенная функция принимает нулевое значение.

По аналогии с предыдущим параграфом для функций Неймана можно создать программы построения таблиц с заданными интервалами параметров, а также программы визуализации их графиков на мониторе компьютера.

Для представления поведения цилиндрических функций больших индексов в удалении от начала координат на практике чаще всего используются следующие асимптотические представления, которые позволяют сделать приблизительные расчеты с указанной степенью точности:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \nu\pi/2 - \pi/4) + O(x^{-3/2})$$

$$\mathcal{N}_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x - \nu\pi/2 - \pi/4) + O(x^{-3/2})$$

Асимптотическое представление демонстрирует характер колебаний цилиндрических функций в удалении от начала координат, но для практических вычислений и численных методов используется чрезвычайно редко. Формулы носят скорее аналитический и теоретический характер.

В соответствии с полученными таблицами значений функций Неймана можно либо построить график в явном виде, либо использовать программы построения графиков по дискретным табличным данным, входящие в стандартные пакеты, в том числе и офисные.

Очевидно, что использование аппарата встроенного в интернет-приложения языка JavaScript предоставляет значительные удобства. Во избежание проблем при расчетах в опциях настроек браузеров нужно разрешить исполнение активных сценариев на веб-страницах так, чтобы всплывающее окно безопасности не было заблокировано, либо разрешать исполнение активных сценариев при каждом запуске программы (это менее удобно).

В заключении главы изложим основные преимущества предлагаемого программного аппарата. Все приведенные программы проверены и работоспособны. Они доступны в сети Интернет для свободного скачивания и выложены на веб-сайте автора по адресу <http://www.mat.net.ua/jk>

Программы разрешено бесплатно скачивать и свободно использовать для любых прикладных расчетов. Разрешено включать их в другие пакеты без дополнительной наценки. Брать вознаграждение за распространение этих программ и присваивать авторство их разработки запрещено. Приводим основные преимущества представленного в книге и на веб-сайте автора прикладного программного обеспечения.

1. Все программы реализованы на современном языке JavaScript, который был разработан и получил широкое распространение с конца XX - начала XXI века. Литература, посвященная языку JavaScript, на сегодня легко доступна (в отличие от ряда морально уже устаревших языков).

2. Для расчетов не требуется установка специальных компиляторов, так как используется стандартное программное обеспечение — интернет-браузеры для просмотра интернет-страниц, которые распространяется в том числе свободно и бесплатно. Наиболее оптимальным для высокой скорости расчетов является бесплатный браузер Mozilla Firefox, хотя использование именно его не обязательно.

3. Программы рассчитаны на обычные 32-разрядные приложения и персональные компьютеры стандартной и средней конфигурации и мощности. Программы работают очень быстро и эффективно, делая математические вычисления легко доступными, а их результаты — переносимыми в другие стандартные файлы и приложения, в том числе офисные приложения.

4. Программы построены по модульному принципу. Программный код открыт, не зашифрован, понятен, легко читается, распространяется свободно и может подлежать модификации и доработке (в том числе переводу в другие программные коды, языки и приложения).

5. Все программы можно легально скачать с Интернет-сайта разработчика, так как они служат популяризации современных компьютерных технологий, численных методов и новых прогрессивных методов программирования в прикладной математике и математической физике.

З а к л ю ч е н и е

При решении многих задач математической физики методом разделения переменных приходят к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, называемого уравнением Бесселя. Характерными задачами, приводящими к цилиндрическим функциям, являются краевые задачи однородного дифференциального уравнения в частных производных — а именно волновое уравнение:

$$\Delta u + \mu u = 0 \quad (5.1)$$

вне или внутри круга (вне или внутри цилиндра в случае трех независимых переменных), а также круговые процессы в неограниченной области. Для данной задачи удобным оказывается введение полярных координат, в следствие чего уравнение преобразуется к виду:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \mu u = 0 \quad (5.2)$$

Полагая $u(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi)$, получаем:

$$R''\Phi + \frac{1}{r} R'\Phi + \frac{1}{r^2} R\Phi'' + \mu R\Phi = 0 \quad (5.3)$$

Откуда следует равенство:

$$\frac{R'' + \frac{1}{r} R' + \mu R}{\frac{1}{r^2} R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} \equiv \lambda \quad (5.4)$$

Это равенство должно выполняться тождественно, то есть при всех значениях двух переменных. Так как левая часть зависит только от r , а правая — только от φ , это возможно, если правая и левая часть одновременно обращаются в одну и ту же константу λ . В противном случае нашлись бы такие значения переменных, при которых равенство бы не выполнялось.

Мы применили метод разделения переменных, который в данном случае оказался эффективным, и получили пару обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + \left(\mu - \frac{\lambda}{r^2} \right) R(r) = 0 \quad (5.6)$$

$$\Phi''(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) = 0$$

Характер решений этих уравнений зависит от знаков постоянных μ и λ . В задачах математической физики обычно рассматривают такие решения, которые получаются при неотрицательных значениях λ .

При нулевом значении μ решение уравнения не представимо в цилиндрических функциях, поэтому в данном издании не рассматривается. Ненулевые значения μ были рассмотрены в предыдущих главах.

Если $\lambda \geq 0$ и $\mu > 0$, тогда общее решение может быть записано в следующем виде с заменами:

$$\lambda = \nu^2 \geq 0, \quad \mu = k^2 > 0, \quad x = kr$$

$$R''(x) + \frac{1}{x} R'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) R(x) = 0 \quad (5.7)$$

$$\Phi''(\varphi) + \nu^2 \Phi(\varphi) = 0$$

$$u(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi) = \left(a_1 \cos(\nu\varphi) + a_2 \sin(\nu\varphi) \right) \left(a_3 J_\nu(kr) + a_4 \mathcal{N}_\nu(kr) \right)$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 — произвольные константы. Их значение зависит от конкретных краевых условий задачи.

В случае решения волнового уравнения, обладающего радиальной (цилиндрической) симметрией, мы получаем уравнение Бесселя нулевого порядка (с нулевым индексом).

Если $\lambda = \nu^2 = 0$, тогда мы получаем следующие соотношения и решения:

$$\Phi(\varphi) \equiv \text{const}$$

$$u(r, \varphi) = a_3 J_0(kr) + a_4 \mathcal{N}_0(kr)$$

Метод разделения переменных привел нас к получению решений волнового уравнения и уравнения Лапласа, выраженного тригонометрическими и цилиндрическими функциями.

Если $\lambda \geq 0$ и $\mu < 0$, тогда общее решение может быть записано в следующем виде с заменами:

$$\begin{aligned}\lambda &= \nu^2 \geq 0, \quad \mu = -k^2 < 0, \quad x = kr \\ R''(x) + \frac{1}{x} R'(x) - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) R(x) &= 0 \\ \Phi''(\varphi) + \nu^2 \Phi(\varphi) &= 0\end{aligned}\quad (5.8)$$

$$u(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi) = (a_1 \cos(\nu\varphi) + a_2 \sin(\nu\varphi)) (a_3 I_\nu(kr) + a_4 \mathcal{K}_\nu(kr))$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 — произвольные константы. Их значение зависит от конкретных краевых условий задачи.

Если $\lambda = \nu^2 = 0$, тогда мы получаем следующие соотношения и решения:

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi) &\equiv \text{const} \\ u(r, \varphi) &= a_3 I_0(kr) + a_4 \mathcal{K}_0(kr)\end{aligned}$$

В задачах математической физики рассматривают такие решения волнового уравнения, которые описывают колебательные процессы. Это возможно в том случае, если постоянная μ строго положительна. Во всех остальных случаях решение уравнения неограниченно возрастает и не описывает колебательные процессы.

Кроме того, в задачах математической физики часто рассматриваются процессы, зависящие от времени, которые можно представить дифференциальным уравнением

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5.9)$$

Сделаем замену $u(r, \varphi, t) = R(r) \Phi(\varphi) T(t)$

На первом этапе разделения переменных представим выражение в виде $u(r, \varphi, t) = F(r, \varphi) T(t)$ и получим:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \mu F = 0 \quad (5.10)$$

$$T''(t) + \mu c^2 T(t) = 0$$

Для уравнения (5.10) решения в общем виде были получены выше. Решением уравнения относительно переменной времени являются тригонометрические функции. Отсюда

$$\lambda = \nu^2 \geq 0, \quad \mu = k^2 > 0, \quad x = kr \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned}u(r, \varphi, t) &= (a_1 \cos(kct) + a_2 \sin(kct)) \cdot \\ &\quad (a_3 \cos(\nu\varphi) + a_4 \sin(\nu\varphi)) (a_5 J_\nu(kr) + \\ &\quad + a_6 \mathcal{N}_\nu(kr))\end{aligned}$$

где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ — произвольные константы. Их значение зависит от конкретных краевых условий задачи. Особенностью уравнения является то, что время в соответствии с физическими реалиями не может приобретать значение константы. Неограниченно возрастающие по времени функции не могут удовлетворять волновому уравнению в силу физической специфики волновых процессов, склонных к постепенному затуханию, а не росту.

В задачах математической физики изучается уравнение Лапласа, которое может быть представимо в цилиндрических координатах в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (5.12)$$

Сделаем замену $u(r, \varphi, z) = R(r) \Phi(\varphi) Z(z)$

На первом этапе разделения переменных представим выражение в виде $u(r, \varphi, z) = F(r, \varphi) Z(z)$ и получим:

$$Z''(z) - \mu Z(z) = 0$$

Решением уравнения относительно третьей переменной координат является аналитическая функция экспоненты.

$$\lambda = \nu^2 \geq 0, \mu = k^2 > 0, x = kr \quad (5.13)$$

$$u(r, \varphi, z) = (a_1 \exp(kz) + a_2 \exp(-kz)) \cdot \\ (a_3 \cos(\nu\varphi) + a_4 \sin(\nu\varphi)) (a_5 J_\nu(kr) + \\ + a_6 \mathcal{N}_\nu(kr))$$

Выписанные уравнения удовлетворяют уравнению (5.12) при произвольных значениях постоянных, которые зависят от краевых условий задачи.

Одной из первых задач, которые привели к рассмотрению функций Бесселя, является задача о колебаниях круглой мембраны, жестко закрепленной по краям. В полярных координатах она удовлетворяет уравнению (5.9).

В начальный момент времени мембрана получает заданное начальными условиями отклонения и скорости, описываемые краевыми условиями:

$$u(r, \varphi, t)|_{t=0} = f(r, \varphi) \text{ — отклонение} \quad (5.14) \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = w(r, \varphi) \text{ — скорость}$$

Мембрана — упругая круглая пластинка, закрепленная по краям. Имеет радиус R . Поскольку ее края закреплены, возникает еще одно дополнительное условие:

$$u(r, \varphi, t)|_{r=R} = 0 \text{ — отклонений от края нет.}$$

Общее решение уравнения описывается (5.10), из которого нужно выделить те, что могут представлять решение краевой задачи (5.14).

1) По φ функция должна быть периодической, так как сделав полный оборот на угол $\varphi \sim 360^\circ$, мы вернемся в ту же самую точку мембраны. Поэтому выполняется

$$u(r, \varphi, t) = u(r, \varphi + 2\pi, t) \quad (5.15)$$

2) Функция $u(r, \varphi, t)$ ограничена при всех значениях радиуса R , поскольку физически осуществимы только такие

колебания цельной круглой ограниченной мембраны. Это исключает функции Неймана из общего решения, так как решение не претерпевает разрыв (мембрана цельная).

3) Функция обращается в ноль на границе мембраны.

Из условия периодичности следует, что индекс функций Бесселя может быть только целыми числами, иначе функция решения не будет иметь период 2π по φ .

$\lambda = n^2 \geq 0$, где n — целые неотрицательные числа

$$u(r, \varphi, t) = (a_1 \cos(kct) + a_2 \sin(kct)) \cdot \\ (a_3 \cos(n\varphi) + a_4 \sin(n\varphi)) J_n(kr) \quad (5.15)$$

Краевому условию на границе мембраны можно удовлетворить, потребовав выполнения условия

$$J_n(kr_0) = 0 \text{ и получив из этого отношения } k.$$

Очевидно, что данное уравнение по k имеет бесконечное множество решений, при которых kr_0 должно принимать значение корней функции Бесселя. Ранее мы показали, что функции Бесселя имеют бесконечно много нулей, поэтому решений общего уравнения бесконечное множество.

Обозначив множество нулей функции Бесселя как $\lambda_m^{(n)}$, мы получим, что k может принимать только следующие значения $k = \lambda_m^{(n)} / r_0$ где $m = 1, 2, 3 \dots$ и n — индекс.

Для того, чтобы удовлетворить общим начальным условиям, нужно использовать линейные комбинации всех возможных решений при всех допустимых значениях установленных параметров, или иными словами — обобщенные ряды вышеуказанных функций (5.15).

Колебание мембраны будет результатом наложения гармонических колебаний, соответствующих функциям $u_m^{(n)}$

Это можно записать в виде двойного ряда:

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(n)}(r, \varphi, t) \quad (5.16)$$

где $\lambda_m^{(n)}$ — нули функции Бесселя $J_n(x) = 0$

$k_m^{(n)} = \lambda_m^{(n)} / r_0$ и выполняется следующее равенство:

$$u_m^{(n)}(r, \varphi, t) = (a_{m1}^{(n)} \cos(k_m^{(n)} c t) + a_{m2}^{(n)} \sin(k_m^{(n)} c t)) \cdot (a_{m3}^{(n)} \cos(n\varphi) + a_{m4}^{(n)} \sin(n\varphi)) J_n(k_m^{(n)} r) \quad (5.17)$$

Каждая из этих функций описывает одно из возможных колебаний мембраны. При фиксированном значении радиуса r каждая из этих функций не зависит от угла φ и меняется только вместе с переменной r с амплитудой

$$R_m^{(0)}(r) = |J_0(k_m^{(0)} r) a_{m3}^{(0)}| ((a_{m1}^{(0)})^2 + (a_{m2}^{(0)})^2)^{1/2}$$

$$\text{и частотой } c\lambda_m^{(0)}/r_0 = ck_m^{(0)} \quad \text{при } n = 0$$

Вблизи границы мембраны колебания незначительны и стремятся к нулю, в то же время достигая своего максимума в центре мембраны. Можно выделить в мембране кольцевые области, которые не участвуют в колебаниях, оставаясь в покое (так называемые узловые линии).

В случае ненулевого индекса n функции (5.17) описывают гармонические колебания, амплитуда которых зависит от угла φ и изменяется при фиксированном значении радиуса r по синусоидальному закону.

Каждая из функций (5.17) представляет возможные колебания мембраны, из которых нужно выбрать такие, которые будут иметь место в конкретной задаче с конкретно указанными и заданными краевыми условиями.

Следует заметить, что на практике наибольшее значение имеют только первые члены ряда (5.16), так как при росте значений параметров n и m значения функций (5.17) быстро стремятся к нулю.

И хотя теоретически решение волнового уравнения представляет результат наложения бесконечного множества колебаний с различными частотами и амплитудами, практически существенную роль играют только колебания, которые соответствуют начальным членам ряда (5.16).

Это делает весьма удобным с практической точки зрения применение функций Бесселя с целочисленными индексами для получения решений волнового уравнения с заданными краевыми условиями численными методами и использованием прикладных программ и компьютерных расчетов, что нашло свое развитие с середины XX века.

В более общем случае можно сказать, что функции Бесселя, заданные следующим отношением

$$J_\nu(\lambda_m^{(\nu)} x) \quad \text{где } \lambda_m^{(\nu)} \text{ — корни этой функции,} \quad (5.18)$$

образуют полную ортогональную систему функций, которая позволяет представлять различные аналитические функции в виде бесконечных рядов. Если функция $f(r)$ непрерывная и дважды дифференцируемая, заданная на интервале $(0, r_0)$, она может быть представлена в виде следующего ряда:

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m^{(\nu)} J_\nu(\lambda_m^{(\nu)} r/r_0) \quad (5.19)$$

Функции (5.18) образуют ортогональную систему на заданном интервале с весом r при целых значениях индекса. Это следует из общей теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Это значит, что

$$\int_0^{r_0} J_n(\lambda_m^{(n)} r/r_0) J_n(\lambda_k^{(n)} r/r_0) r dr = 0 \quad m \neq k$$

Вычислим норму собственных функций (5.19) при целых неотрицательных значениях индекса. Обозначим

$$P(r) = J_n(\lambda_m^{(n)} r/r_0) \quad \text{где } k_m = \lambda_m^{(n)}/r_0 \quad (5.21)$$

$$R(r) = J_n(kr) \quad \text{где } k \text{ — произвольный параметр.}$$

Эти функции удовлетворяют паре уравнений вида:

$$\left[\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dP}{dr} \right) + \left(k_m^2 r - \frac{n^2}{r} \right) P(r) &= 0 \\ \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(k^2 r - \frac{n^2}{r} \right) R(r) &= 0 \end{aligned} \right]$$

При этом первая функция $P(r_0) = 0$, а вторая уже не удовлетворяет этому условию. Умножим первое уравнение на $R(r)$, а второе на $P(r)$ и вычтем второе уравнение из первого, проинтегрировав затем по r в пределах рассматриваемого интервала. Таким образом, мы получим:

$$\int_0^{r_0} r P(r) R(r) dr = - \frac{r_0 J_n(k r_0) k_m J'_n(k_m r_0)}{k_m^2 - k^2}$$

Перейдем к пределу $k \rightarrow k_m$

Для этого раскроем неопределенность в правой части по правилу Лопиталья, одновременно продифференцировав числитель и знаменатель по k и после этого выполнив предельный переход. Мы получим квадрат нормы

$$\|J_n(k_m r)\|^2 = \int_0^{r_0} r J_n^2(\lambda_m^{(n)} r/r_0) dr = \frac{r_0^2}{2} (J'_n(\lambda_m^{(n)}))^2$$

Если мы перейдем к пределу $k \rightarrow k_k$, то получим условие ортогональности (5.20).

Исходя из рекуррентных отношений функций Бесселя, для функций Бесселя нулевого индекса можно записать следующее значение нормы:

$$\|J_0(k_m r)\|^2 = \frac{r_0^2}{2} (J_1(\lambda_m^{(0)}))^2$$

Доказана следующая теорема разложимости: всякая дважды дифференцируемая функция, ограниченная при $r=0$ и обращающаяся в ноль при $r=r_0$, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m^{(n)} J_n(\lambda_m^{(n)} r/r_0)$$

$$\text{где } c_m^{(n)} = \int_0^{r_0} r f(r) J_n(\lambda_m^{(n)} r/r_0) dr / \|J_n(k_m r)\|^2$$

В ряде задач приходится сталкиваться с разложениями не только по ограниченным функциям Бесселя, но и по функциям Неймана с особенностями в нуле, а также их производных. В этом случае при использовании численных методов необходимо исключать из вычислений малую окрестность границы, где функции Неймана имеют неустраимую особенность и стремятся к бесконечности.

Как видно из вышесказанного, большое практическое значение имеет получение нулей функции Бесселя программным способом. При наличии программы вычислений значений функции Бесселя задача отыскания ее корней не представляет сложности — она стандартная.

Задачу облегчает тот факт, что при стремлении к бесконечности интервал между корнями стремится к π . Это позволяет пропустить часть промежуточных вычислений и перескакивать от корня к корню, пропуская итерации.

Для поиска корней программным методом необходимо производить пошаговые вычисления значений функции Бесселя до тех пор, пока на очередном шаге значение функции не поменяет знак. Между этими двумя значениями переменной окажется корень функции Бесселя. При малой доле вероятности в процессе итераций корень функции Бесселя может быть получен и явно, что учитывается.

Пусть $x_1 x_2 \dots x_k$ — пошаговые итерации

и $J_k = J_n(x_k)$ — полученное значение функции Бесселя на k итерации. Как только мы получим, что

$$J_{k-1} < 0 \text{ и } J_k > 0 \text{ или } J_{k-1} > 0 \text{ и } J_k < 0$$

это значит, что между x_{k-1} и x_k находится корень

$$\lambda_m^{(n)} \approx x_{k-1} + \frac{|J_{k-1}| (x_k - x_{k-1})}{|J_{k-1}| + |J_k|}$$

Вычисления значений функции Бесселя нужно производить с максимально высокой для 32-разрядных приложений точностью — 1E-12. Величину шага достаточно назначать в пределах 1E-6 — 1E-12, что позволит получить оптимальные результаты.

После нахождения корня производим сдвиг переменной x на величину, кратную шагу итерации, но меньше π , например, от 3 до 3.1 — это ускорит работу программы. На современных компьютерах вычисления проводятся очень быстро, таблицу первых корней функций Бесселя можно получить в течение считанных секунд. Программу вычисления первых корней функций Бесселя можно бесплатно скачать с веб-сайта автора-разработчика.

В заключении приведем интегральные представления цилиндрических функций без доказательства.

$$J_n(x) = \int_0^\pi \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta \quad (5.26)$$

$$J_{2n}(x) = \int_0^\pi \cos 2n\theta \cos(x \sin \theta) d\theta \quad (5.27)$$

$$J_{2n+1}(x) = \int_0^\pi \sin(2n+1)\theta \sin(x \sin \theta) d\theta \quad (5.28)$$

Обозначим $c = \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(1/2+\nu) \Gamma(1/2)}$ и $\nu > -1/2$

$$J_\nu(x) = c \int_0^\pi \sin^{2\nu} \theta \cos(x \cos \theta) d\theta \quad (5.29)$$

$$J_\nu(x) = c \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2\nu} \theta \cos(x \sin \theta) d\theta \quad (5.30)$$

$$J_\nu(x) = c \int_{-1}^1 (1-\theta^2)^{\nu-1/2} \cos x\theta d\theta \quad (5.31)$$

Обозначим $s = \frac{(x/2)^{-\nu}}{\Gamma(1/2-\nu) \Gamma(1/2)}$

$$\mathcal{N}_\nu(x) = 2c \left(\int_0^{\pi/2} \cos^{2\nu} \theta \sin(x \sin \theta) d\theta - \int_0^\infty \exp(-x \operatorname{sh} \theta) \operatorname{ch}^{2\nu} \theta d\theta \right) \quad (5.32)$$

$$\mathcal{N}_\nu(x) = -2s \int_1^\infty (1-\theta^2)^{-\nu-1/2} \cos x\theta d\theta \quad (5.33)$$

$-1/2 < \nu < 1/2$

Существуют и другие интегральные представления цилиндрических функций, выражающих интегральные зависимости между различными специальными функциями. Они очень редко применяются в численных методах.

Кроме цилиндрических функций и функций Бесселя, в прикладной математике и математической физике существует широкий класс специальных функций — ортогональные полиномы и другие функции, возникающие при использовании различных систем координат.

Метод разделения переменных в дифференциальных уравнениях в частных производных может приводить к более широкому классу специальных функций, для представления которых также используются рекуррентные отношения. Причем для каждого класса функций рекуррентные отношения выводятся, исходя из конечного их представления, а не из общего вида самого уравнения.

Одно из общих уравнений для простейших специальных функций может быть записано в виде:

$$\mathcal{L}y(x) + \lambda \rho(x)y(x) = 0 \quad (5.34)$$

$$\mathcal{L}y(x) = \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dy(x)}{dx} \right) - g(x)y(x)$$

$$a < x < b, \quad \rho(x) > 0, \quad k(x), g(x) \geq 0$$

Простейшая краевая задача определяет тригонометрические функции. Частным случаем обобщенной задачи (5.34) являются рассмотренные в настоящей главе цилиндрические функции — функции Бесселя, Неймана и др.

При других значениях параметров можно получить уравнение Лежандра, уравнение присоединенных функций Лежандра, уравнение Чебышева-Эрмита и уравнение Чебышева-Лягерра. Характерной особенностью указанных уравнений и краевых задач является обращение в нуль коэффициента $k(x)$ по крайней мере, на одном из концов интервала (a, b) . Это свойство играет важную роль для постановки краевых задач уравнения (5.34).

Помимо указанных выше, существует общий класс специальных функций, рекуррентные отношения для которых можно получить методом рекуррентных отношений только на основании общего вида уравнения. Для этого нужно воспользоваться Второй базовой теоремой, которая обобщает результаты Первой базовой теоремы, рассматривая уравнения в том числе с нулевыми собственными значениями.

Суть Второй базовой теоремы заключается в следующем. Рассмотрим уравнение Штурма-Лиувилля в общем виде с произвольным или нулевым собственным значением:

$$y''(x) + g(x)y(x) = 0 \quad (5.35)$$

существует следующая замена вида:

$$z(x) = A(x)y(x) + B(x)y'(x) \quad (5.36)$$

которая переводит уравнение (5.25) в уравнение

$$z''(x) + q(x)z(x) = 0 \quad (5.37)$$

если выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} q(x)A(x) &= -A''(x) + g(x)A(x) + \\ &+ 2g(x)B'(x) + g'(x)B(x) \\ q(x)B(x) &= -2A'(x) - B''(x) + g(x)B(x) \end{aligned} \quad (5.38)$$

Кроме того, существует такая константа μ и функция, обозначенная $\varphi(x)$, что выполняются следующие условия:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \quad (5.39)$$

$$\varphi''(x) + (g(x) - \mu / B^2(x))\varphi(x) = 0 \quad (5.40)$$

где $\mu = \text{const} \neq 0$ (невырожденная)

$$\left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)^2 - \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{A(x)}{B(x)}\right) = -g(x) + \frac{\mu}{B^2(x)} \quad (5.41)$$

Как было показано в Первой базовой теореме, если в уравнении (5.35) удастся выделить ненулевое собственное значение, задача отыскания рекуррентных отношений заметно облегчается, так как потенциал замены при первой производной обращается в тождественную константу.

Все предложенные формулы фактически были получены при доказательстве Первой базовой теоремы, которая является частным случаем обобщенной Второй базовой теоремы. Указанные отношения описывают общие зависимости, возникающие при построении рекуррентных отно-

шений для решений уравнения Штурма-Лиувилля, на основании чего могут быть получены рекуррентные отношения для более широкого класса задач линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Вместо того, чтобы пытаться решить неразрешимую задачу — найти приближение решения уравнения Штурма-Лиувилля для нулевых собственных значений, используя ненулевые собственные значения, автору удалось получить прямые формулы, обеспечивающие решение обобщенной задачи построения рекуррентных отношений.

Невзирая на кажущуюся громоздкость, выведенные отношения очень удобны для практического применения, так как обычно поиски рекуррентных зависимостей ведутся в строго определенном узком классе задач. Для практического использования формул часто приходится использовать метод неопределенных коэффициентов, который позволяет легко выписывать рекуррентные зависимости для самого широкого круга практических задач.

Примеры практического применения предложенного метода рекуррентных отношений для обобщенной задачи Штурма-Лиувилля и произвольных собственных значений уравнения будут показаны в следующей главе и в следующем издании, которое выпускается по частям.

Обобщенная Вторая базовая теорема очень удобна для обобщенного исследования отдельных классов специальных функций, в том числе ортогональных полиномов, которые удалось систематизировать на основе предложенного подхода — обобщенного метода рекуррентных отношений.

Все рекуррентные отношения на основании предложенного метода выводятся напрямую, исходя **только из общего вида начального линейного дифференциального уравнения второго порядка** с произвольными собственными значениями, как нулевыми, так и ненулевыми.

Автор считает предложенный метод прогрессивным, позволяющим работать не только со специальными функциями, но и получать аналитические решения сложных дифференциальных уравнений второго порядка на основе хорошо исследованных дифференциальных уравнений и рекуррентных отношений для их решений. В настоящем издании этот новаторский подход был применен к цилиндрическим функциям — функциям Бесселя и Неймана.

В конце XIX - начале XX века на всех математических факультетах университетов изучение специальных функций в теории было обязательным, им уделялось большое внимание. Для их обозначения применялись особые начертания букв и символов, подчеркивавшие их уникальность и особую важность в прикладной математике.

С середины XX века основной акцент переместился на компьютерное программное вычисление значений специальных функций и их применение для моделирования конкретных процессов в прикладных задачах. Специальные функции потеряли особое шрифтовое начертание, подчеркивавшее в книгах и других печатных изданиях их индивидуальность и выделявшее их из общей массы.

Среди ученых распространилось мнение, будто в теории специальных функций невозможно сказать новое слово, эта теория якобы является теоретически законченной, хоть и не стройной и не систематизированной.

Автор стремится вернуть интерес исследователей к теоретическому аппарату специальных функций и проблеме систематизации и обобщения свойств этих функций, а также найти пути нетривиального применения этого мощного теоретического и практического аппарата.

Автор также постаралась соблюсти разумный баланс между теорией и практическим применением этого аппарата для сегодняшних реалий.

В заключении главы хочется сказать о необходимости возрождения фундаментальных и научных исследований, в том числе в области прикладной математики и математической физики. Последнее десятилетие XX века было очень сложным и проблемным для фундаментальной и прикладной науки и ученых стран бывшего СССР, для отечественной науки оно обернулось реальной катастрофой.

Только из Украины за рубеж на постоянное проживание выехало больше ученых, научных работников и специалистов, чем из любого другого европейского государства (за исключением России). Трагедия была в том, что далеко не все из тех, кто уехал за рубеж, нашли себя именно в сфере образования, научной и научно-практической работы.

Фундаментальная наука украинского государства, затратившего колоссальные средства на подготовку и обучение специалистов, по уровню подготовки не уступающих спе-

циалистам мирового уровня, а то и превосходящих их по качеству теоретической подготовки и практического опыта работы, оказалась в буквальном смысле обескровлена.

Большинство исследований были прекращены, а креативная работа молодых ученых вообще не поддерживалась и не поощрялась ни материально, ни морально — более того, шла настоящая охота за новыми идеями. Хочется выразить **благодарность тем практикам**, которые использовали специальные функции в своих расчетах и уделяли много внимания этим вопросам даже в столь тяжелое время.

Но эти деструктивные процессы не в состоянии были сдержать полет научно-технической мысли и остановить фундаментальные и научно-практические исследования тех, кто действительно является истинным приверженцем науки и не представляет свою жизнь без научных исследований. Трудно остановить тех, у кого стремление к научно-техническому прогрессу заложено в душе и сознании.

Мы — новое поколение научно-технической революции и дети научно-технического прогресса. На наших глазах компьютерные технологии сделали колоссальный шаг вперед, компьютеры превратились из единичных огромных машин, занимавших целые залы, в компактный, доступный и очень популярный рабочий инструмент. Была создана глобальная мировая библиотека и сеть мирового обмена информацией — Интернет. Сегодня многие не представляют свою жизнь без цифровых технологий, основы которой были заложены учеными предыдущих поколений.

Только от нас самих зависит, быть современной украинской науке или не быть. Только мы сами сможем двигать вперед научно-технический прогресс, продолжать фундаментальные исследования и научно-практические изыскания. Мы живем в эпоху, о которой грезили и мечтали прогрессивные ученые XX века.

Научные и цифровые технологии буквально перевернули всю современную жизнь. Математика проникла во все сферы и отрасли человеческой жизни. Сегодня такие дисциплины, как физика и география, химия и биология, экономика и даже политика не могут существовать без реального применения математического аппарата.

Давайте не забывать, что все в этом мире вокруг нас — это прикладная математика и числа ...

Об авторе

На сегодня основная профессия автора издания — профессиональный веб-дизайн и полиграфические технологии. Окончила механико-математический факультет Харьковского Национального университета им. В. Н. Каразина (отделение прикладной математики, кафедра математической физики) в 1994 году и защитила диплом по данной теме.

Проблемами специальных функций занимается с 1991 года. Прямой вывод рекуррентных соотношений для функций Бесселя и Неймана был получен автором в 1992 году. В 1993 году была разработана обобщенная теорема, позволяющая получить рекуррентные соотношения в общем случае.

Исследования и теоретические изыскания в области специальных функций математической физики продолжались и после окончания университета до 1999 года, и после перерыва они были возобновлены в 2007 году.

С 1993 года автор профессионально занимается представительской полиграфией, компьютерной версткой и созданием оригинал-макетов различной сложности, а также журналистикой в компьютерной отрасли и в Интернет.

С 1999 года профессионально занимается интернет-программированием, веб-дизайном и написанием клиентских сценариев на языке JavaScript для сайтов и веб-страниц.

В 2007 году автор возобновила работу над специальными функциями математической физики, привлекая для этого современный аппарат языка JavaScript. Данный язык позволяет реализовать алгоритмический аппарат численных методов для стандартных персональных компьютеров в стандартных 32-разрядных интернет-приложениях (браузерах). Такой подход на сегодня является новаторским. Программы можно скачать с интернет-сайта автора-разработчика.

Целью настоящего издания является не только пропаганда современных методов и подходов к теории и практике специальных функций математической физики, но и поиск единомышленников, кому небезразличны изыскания в области линейных дифференциальных уравнений второго порядка, специальных функций математической физики и использование современного программного обеспечения для реализации численных методов математической физики.

Наибольший интерес для автора представляет исследование и математическое моделирование аномальных и экстраординарных природных и техногенных процессов.

Специальные функции математической физики

Часть 1. Функции Бесселя и цилиндрические функции в элементарном изложении с программами вычислений

Введение	4
Глава 1. Общие понятия и теоремы	
§ 1. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка	7
§ 2. Получение рекуррентных соотношений для решений уравнения Штурма-Лиувилля с ненулевым собственным значением	12
§ 3. Гамма-функция Эйлера, краткий обзор	20
Глава 2. Общие понятия и теоремы	
§ 1. Рекуррентные соотношения для функций Бесселя	21
§ 2. Функции Бесселя с полупелым индексом	29
§ 3. Асимптотическое поведение и явное выражение через степенные и тригонометрические ряды функций Бесселя с полупелым индексом	37
§ 4. Функции Бесселя с полупелым индексом, неограниченные в нуле	41
§ 5. Разложение в степенные ряды функций Бесселя с произвольным индексом	45
§ 6. Цилиндрические функции Неймана	52
§ 7. Другие цилиндрические функции	57
§ 8. Поведение цилиндрических функций в окрестности нуля	60
§ 9. Корни решений уравнения Бесселя	62
§ 10. Асимптотическое поведение функций Бесселя и Неймана	75
§ 11. Приведение дифференциальных уравнений второго порядка к уравнению Бесселя	84
§ 12. Итоговые результаты главы	112
Глава 3. Другие аспекты уравнений Бесселя и цилиндрических функций	
§ 1. Приведение дифференциальных уравнений старших порядков к уравнению Бесселя	116
Глава 4. Программы и алгоритмы вычислений	
§ 1. Общая постановка задачи вычислений	122
§ 2. Программное вычисление функций Бесселя	125
§ 3. Программное вычисление функций Неймана	148
Заключение	162
Об авторе	178

Юлия Викторовна Кафтанова

Специальные функции математической физики
Издание осуществляется в трех частях

Часть 1. Функции Бесселя и цилиндрические функции
в элементарном изложении с программами вычислений

Часть 2. Ортогональные полиномы и другие сферические функции
в элементарном изложении с программами вычислений

Части 1 и 2 рассчитаны на специалистов, инженеров и математиков. В них строго излагается авторский метод рекуррентных отношений для специальных функций математической физики и особенности их применения на практике.

Часть 3. Моделирование аномальных и экстраординарных
природных и техногенных процессов

Часть 3 носит научно-популярный характер и рассчитана в первую очередь на нематематиков. Она написана понятным языком и рассказывает о таких явлениях, как движущиеся камни в Долине Смерти, цунами, волны-убийцы, землетрясения, торнадо, смерчи и шквалы в атмосфере с точки зрения матфизики.

Для профессиональных музыкантов и любителей современной музыки строится математическая модель звучания современной постхендриковской электрогитары.

К части 3 бесплатно прилагается компакт-диск с цветными компьютерными иллюстрациями, фотографиями и видеоматериалами очевидцев.

Юлия Викторовна Кафтанова

Специальные функции математической физики

Часть 1. Функции Бесселя и цилиндрические функции
в элементарном изложении с программами вычислений

ЧП Издательство «Новое слово», Харьков

Редактор выпуска: Антон Анатольевич Кафтанов

Дизайн обложки и компьютерная верстка: Ю.В. Кафтанова

Для писем: Кафтанова Ю.В., а/я 10911, Харьков, 61003, Украина

Наши электронные адреса: www.ois.org.ua, www.mat.net.ua

E-mail: webois@bk.ru, korum68@bk.ru

Печать обложки: типография «Планета Принт»

Сдано в набор 28.08.2007. Подписано в печать 05.01.2009.

Формат 84x118/32. Бумага офсетная. Печать лазерная.

Гарнитура "NewBaskerville". Усл. авт. л. 7,16.

Тираж 500 экз.

ISBN 978-966-2046-62-5



9 789662 046625 >

Любое использование материалов настоящей книги разрешается только с обязательной ссылкой на автора текста и настоящее научно-популярное издание.

ISBN 978-966-2046-62-5

Первая Бэзовская теорема
Для решения исходного уравнения
 $y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad \lambda \neq 0$
существует рекуррентное отношение
 $z'(x) = A(x)y(x) - y'(x)$
где $A(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ и $A^2(x) + A'(x) = q(x) + \mu$
и $\varphi''(x) + q(x)\varphi(x) = \mu\varphi(x), \quad \mu \neq \lambda$
 $z''(x) + q(x)z(x) = \lambda z(x), \quad \varphi(x) \neq \lambda y(x)$
где $q(x) = q(x) + 2A'(x)$
или $q(x) = -q(x) - 2A^2(x) + 2\mu$

В части 1 излагается
применение метода
рекуррентных отношений,
который позволяет
получить рекуррентные
отношения для функций
Бесселя и описать
различные свойства
цилиндрических функций
наиболее коротким и
простым способом, исходя
только из общего вида
уравнения Бесселя.
Также приводятся
разработанные автором
программы вычислений
цилиндрических функций
на языке JavaScript.

