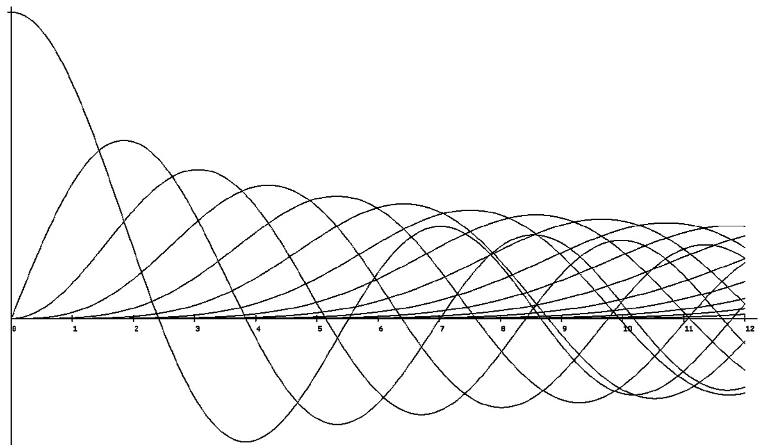
Юлія Кафтанова

Спеціальні функції математичної фізики

Частина 1А

Функції Беселя
і циліндрові функції
в елементарному викладенні
з програмами обчислень



ПП Видавництво «Нове слово»
Харків
2009

УДК 531.0
ББК 22.311
К-305

Free preview. BarcodeRobot.com 2004-2015 ©
ISBN 978-966-2046-62-5
00000
9 789662 046625

webois K.305
ORCID 0000-0003-4306-1738

Кафтанова Ю. В.

К-305 Специальные функции математической физики. Научно-популярное издание. – Х.: ЧП Издательство «Новое слово», 2009. – 596 с.

ISBN 978-966-2046-62-5

Издание рассматривает метод рекуррентных отношений для специальных функций математической физики и особенности использования специальных функций для моделирования различных природных и техногенных процессов.

Часть 1 рассматривает цилиндрические функции Бесселя и Неймана. Часть 2 изучает поведение сферических функций и ортогональных полиномов. Приводятся авторские программы вычислений, написанные на языке JavaScript.

В части 3 изучается применение специальных функций для математического моделирования природных катаклизмов – цунами, землетрясений, торнадо, смерчей и для исследования поведения движущихся камней в Долине Смерти, США. Также строится математическая модель звучания и управления электрогитары с использованием современного аппарата специальных функций матфизики.

Рассчитано не только на специалистов-математиков, но и на широкий круг подготовленных читателей.

УДК 531.0
ББК 22.311

ISBN 978-966-2046-62-5

Спеціальні функції математичної фізики

Частина 1А. Функції Беселя і циліндрові функції в елементарному викладенні з програмами обчислень

В в е д е н н я

Сьогодні як математичний апарат в багатьох галузях сучасної прикладної математики, математичної фізики і технічних застосуваннях широко використовуються функції Беселя і циліндрові функції.

Області застосування цих функцій різноманітні. Вони забезпечують швидку і коректну збіжність розв'язків цілого ряду прикладних задач, які можуть бути так чи інакше зведені до рівняння Беселя. Інтерес математиків та інженерів до спеціальних функцій матфізики досі не згасає.

Трохи історії. У 1732 році математик Данило Бернуллі в задачі про коливання вертикально підвішеної важкої гнучкої нитки прийшов до рівняння, що описує амплітуду коливань нитки на різних відстанях від точки підвісу:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{du}{dx} + \omega\, u(x) = 0$$

У 1764 році математик Л. Ейлер отримав звичайне лінійне диференціальне рівняння другого порядку наступного вигляду:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{du}{dx} + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) u(x) = 0$$

У 1822 році математик Ж. Фурье розглянув проблему розподілу температури в нагрітому циліндрі, який охолоджується за певних умов. Ж. Фурье отримав рівняння такого ж вигляду, як и Д. Бернуллі, і описав його розв'язку способом розкладення в ряд. Особливість розв'язок даного рівняння полягає в тому, що вони не можуть бути виражені за допомогою елементарних функцій — степеневих, показових, логарифмічних, тригонометричних, гіперболічних або їх комбінації.

Після того, як в 1824 році математик В. Бесель найбільш послідовно розглянув ці розв'язки і виділив їх в окремий клас, згодом вони отримали назву функцій Беселя (або циліндрових функцій), а рівняння отримало назву класичного рівняння Беселя:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

Кінець XIX й XX століття ознаменувалося тим, що при пошуку розв'язків величезної кількості задач прикладної математики і математичної фізики математики і інженери почали використовувати ряди функцій Беселя і циліндрових функцій, що дуже швидко сходяться.

За допомогою рекурентних формул були складені таблиці значень функцій Беселя. Особливо актуально питання практичного застосування функцій Беселя встало при широкому використанні комп'ютерних технологій — для розрахунку прикладних фізичних задач. І вся увага розробників була зосереджена в першу чергу на прикладних роботах, а не на розробці загальної фундаментальної теорії.

Протягом тривалого часу в багатьох популярних працях типовий виклад теорії функцій Беселя зводився до наступного. Спочатку давалися загальні формули, що описують деякі привабливі та зручні функції математичної фізики, потім на їх підставі виводилися рекурентні відношення, після чого доводилося, що ці функції є розв'язком рівняння Беселя. Тобто викладання теорії функцій Беселя йшло в зворотньому напрямку — від конкретного розв'язку рівняння Беселя до початкового виду рівняння.

Деякий час назад авторові вдалося розробити **метод рекурентних відношень** і отримати рекурентні відношення для циліндрових функцій та функцій Беселя, не використовуючи при цьому безпосередньо їх значення, а виходячи **виключно із загального виду рівняння Беселя**. На сьогодні це найпростіший і найкоротший спосіб отримання рекурентних відношень для функцій Беселя. Для його розуміння достатні загальні знання теорії лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Автор займалася дослідженнями звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку та їх окремого випадку — рівняння Штурма-Ліувіля, що широко використовується в сучасній математичній фізиці:

$$y''(x) + g(x)y(x) = \lambda y(x)$$

де λ — власні значення рівняння.

Вивчалася можливість розробки та застосування методу рекурентних відношень для розв'язків рівняння Штурма-Ліувіля з використанням одного з двох лінійно-незалежних розв’язків диференціального рівняння (найбільш очевидного) для власних значень і перетворення Дарбу.

Для того, щоб досліджувати зручність і коректність запропонованого апарату в тривіальному випадку $\lambda \neq 0$ на конкретних прикладах, було розглянуто рівняння Беселя. Воно було зведене до рівняння Штурма-Ліувіля. Після цього була застосована Перша базова теорема. Таким чином, вдалося отримати добре відомі рекурентні відношення для функцій Беселя, використовуючи виключно загальний вид рівняння Беселя (і Штурма-Ліувіля) і один тривіальний (лінійно-незалежний) розв’язок рівняння.

Дослідження складнішого випадку $\lambda = 0$ і застосування до нього узагальненої Другої базової теореми дозволило на підставі загального рівняння явно виписати рекурентні відношення для інших популярних спеціальних функцій — ортогональних поліномів. Ознайомлення з цим методом стисло викладене у Висновку та детально в 2 частини видання.

Щоб розуміння методу рекурентних відношень для спеціальних функцій було чітким і незалежним від інших джерел, автор приводить окремі елементи теорії лінійних диференціальних рівнянь другого порядку і короткий огляд Гамма-функцій (функцій Ейлера) з графіками.

Запропонований підхід до розгляду спеціальних функцій є нетрадиційним, та через зручність його застосування може бути використаний надалі для найширшого круга задач математичної фізики, що зводяться до звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку і зокрема до рівняння Штурма-Ліувіля або рівняння Беселя.

Метод рекурентних відношень, що наводиться автором, дуже зручний для задач комп’ютерної алгоритмізації та автоматизованих розрахунків прикладних задач. У останніх розділах приводяться алгоритми обчислень значень циліндрових функцій, розроблених автором на мові JavaScript.

Наведені в роботі обчислення виконані або перевірені за допомогою цього сучасного апарату.

Р о з д і л I
Загальні поняття і теореми

§ 1. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Перед тим, як приступити до розгляду рівняння Беселя, зупинимося на деяких аспектах звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку, окремим випадком яких і є рівняння Беселя.

Ми розглядатимемо випадок, при якому друга похідна не вироджена і само рівняння не є рівнянням першого порядку.

$$f_2(x)\,y''(x)+f_1(x)\,y'(x)+f_0(x)\,y(x)=f(x)$$

де $f_2(x)$ — невироджена функція, що тотожно не рівна нулю.

Диференціальним рівнянням, особливо невиродженим лінійним, присвячується обширна література та численні наукові праці. Тому ми зупинимося тільки на тих аспектах, які будуть необхідні для розуміння методу рекурентних відношень.

Звичайне диференціальне рівняння виражає залежність між незалежною змінною, функцією змінної та похідними функції. Порядок диференціального рівняння визначається найвищою похідною функції, що входить до його складу.

Порядок диференціального рівняння визначається найвищою похідною функції, що входить до його складу. Якщо в рівнянні змінна та її похідні входять тільки в першому ступені, таке рівняння називається лінійним. Відповідно коефіцієнти лінійного рівняння — це константи або функції незалежної змінної $f(x)$.

Деякі нелінійні рівняння, що містять дробові ступені, можуть бути приведені до звичайних лінійних рівнянь другого порядку шляхом позбавлення від степеневих дробів. В цьому випадку перед розглядом рівняння потрібно спробувати позбавитися від дробу.

Окремим випадком лінійних диференціальних рівнянь є однорідні диференціальні рівняння, в яких $f(x)=0$. Для отримання розв'язок неоднорідного рівняння використовуються розв'язок однорідного рівняння, тому аспект $f(x)=0$ важливий.

Розв'язком невиродженого звичайного однорідного диференціального рівняння другого порядку є комбінація двох частинних лінійно-незалежних рішень:

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

де c_i — деякі константи, $y_i(x)$ — пара лінійно-незалежних розв'язків рівняння. Ми не приводимо доказ цього твердження.

Істотним моментом застосування методу рекурентних відношень є зведення невиродженого звичайного однорідного диференціального рівняння другого порядку до конкретного випадку — рівняння Штурма-Ліувіля.

У зв'язку з цим встають концептуальні питання існування власних значень і власних функцій даного рівняння. Надалі ми припускаємо, що всі необхідні для доказу похідні та інтеграли існують.

Теорема 1. *Звичайне невироджене лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку вигляду:*

$$f_2(x)z''(x)+f_1(x)z'(x)+f_0(x)z(x)=0 \qquad (1.1.1)$$

може бути лише єдиним чином зведене до рівняння Штурма-Ліувіля:

$$y''(x)+g(x)y(x)=\lambda y(x) \qquad (1.1.2)$$

де $g(x)$— функція, λ — деяка константа.

Для цього використовується заміна:

$$z(x)= P(x)y(x) \qquad (1.1.3)$$

$$\text{де } P(x)=exp\left(-\frac{1}{2}\int^{x}\frac{f_1(\xi)}{f_2(\xi)}d\xi\right) \qquad (1.1.4)$$

$$и \quad f_2(x)\not\equiv 0$$

Функція $g(x)$ і власне значення можуть бути записані одним з двох еквівалентних виразів:

$$g(x)+\lambda=\beta(x)-\frac{1}{4}(\alpha^2(x)+2\alpha'(x)) \qquad (1.1.5)$$

$$g(x)+\lambda=P^{-1}(x)(P''(x)+\alpha P'(x)+\beta P(x)) \qquad (1.1.6)$$

При цьому необхідно відмітити, що до одного й того ж виду рівняння Штурма-Ліувіля можуть бути приведені різні види однорідних невироджених лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Приведемо доказ. Для цього позбавимося від неодиничної функції при другій похідній:

$$z''(x)+z'(x)f_1(x)/f_2(x)+z(x)f_0(x)/f_2(x)=0$$

Позначимо: $\quad \alpha=f_1(x)/f_2(x) \qquad (1.1.7)$

$$\beta=f_0(x)/f_2(x) \qquad (1.1.8)$$

Тоді базове рівняння (1.1.1) прийме вигляд:

$$z''(x)+\alpha z'(x)+\beta z(x)=0$$

Потім підставимо заміну (1.1.3) в диференціальне рівняння (1.1.1) й накладемо додаткові умови. Рівняння прийме наступний вигляд:

$$\begin{aligned}0&=z''(x)+\alpha z'(x)+\beta z(x)=\\&=(Py(x))''+\alpha(Py(x))'+\beta(Py(x))=\\&=P''y(x)+2P'y'(x)+Py''(x)+\alpha P'y(x)+\\&\quad+\alpha Py'(x)+\beta Py(x)=0\end{aligned} \qquad (1.1.9)$$

Для отримання рівняння Штурма-Ліувіля ми повинні вимагати, щоб значення потенціалу при першій похідній функції $y'(x)$ тотожно дорівнювало нулю для всіх значень змінної, а саме:

$$y'(x)\;(2P'+\alpha)\equiv 0$$

Оскільки спочатку ми припускаємо, що початкове диференціальне рівняння (1.1.1) та заміна (1.1.3) не вироджені, функція $y'(x)$ не може бути тотожним нулем. Тому що інакше $y(x)=\mathrm{const}$ й початкове рівняння вироджується. Тому для існування заміни ми повинні вимагати тотожної рівності нулю наступного отриманого нами виразу:

$$2P'(x)+\alpha(x)=0 \qquad (1.1.10)$$

Очевидно, що ми отримали однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Таким чином, завдання зведення диференціального рівняння до рівняння Штурма-Ліувіля вимагає розв'язок простого лінійного диференціального рівняння першого порядку (1.1.10).

З теорії диференціальних рівнянь відомо, що такий розв'язок існує й він єдиний (з точністю до множника-константи). Єдиність цього розв'язку доводить єдиність існування заміни (1.1.3) і єдиність способу приведення рівняння (1.1.1) до рівняння Штурма-Ліувіля (1.1.2). Воно виражається:

$$P(x)=exp\left(-\frac{1}{2}\int^{x}\alpha(\xi)\,d\xi\right) \qquad (1.1.11)$$

Безпосередньо підставивши сюди значення $\alpha(\xi)$ відповідно до введених нами раніше позначень (1.1.7), ми отримаємо формулу (1.1.4) для заміни (1.1.3).

Таким чином, ми в явній формі встановили заміну, яка в рівнянні (1.1.9) забезпечує нульовий потенціал при першій похідній, та довели єдиність такої заміни. Тепер запишемо отримане рівняння (1.1.9) без першого потенціалу:

$$P''y(x)+Py''(x)+\alpha P'y(x)+\beta Py(x)=0$$

Перегрупуємо члени при однакових потенціалах для отримання рівняння Штурма-Ліувіля явно:

$$Py''(x)+(P''+\alpha P'+\beta P)y(x)=0$$

Або $y''(x)+\dfrac{P''+\alpha P'+\beta P}{P}y(x)=0$ (1.1.12)

Очевидно, що значення нульового потенціалу в рівнянні Штурма-Ліувіля можна виразити явним відношенням:

$$g(x)+\lambda=\frac{P''(x)+\alpha P'(x)+\beta P(x)}{P(x)} \qquad (1.1.5)$$

Таким чином, після підстановки в це відношення значень (1.1.11), (1.1.7) і (1.1.8) отримуємо вираз:

$$g(x)+\lambda=\beta(x)-\frac{1}{4}(\alpha^2(x)+2\alpha'(x)) \qquad (1.1.6)$$

Теорема доказана. Розв'язок рівняння Штурма-Ліувіля визначається з точністю до константи, оскільки рівняння є однорідним, і єдиність подання розуміється саме в цьому сенсі.

Примітка. У виразах (1.1.5) і (1.1.6) ми отримуємо не тільки деякий потенціал $g(x)$, але і константу λ, яку по можливості необхідно виділити окремо. Це власне значення рівняння Штурма-Ліувіля.

Відмітимо, що і потенціал $g(x)$, і власне значення λ можуть приймати будь-яке довільне (зокрема й нульове) значення.

Наявність пари невироджених рішень, відповідних деякому ненульовому власному значенню λ, дозволить надалі застосовувати спрощену формулу для побудови рекурентних відношень для розв'язків рівняння Штурма-Ліувіля. Ці відношення будуть розглянуті в Першій базовій теоремі. Саме вони використовуються для отримання рекурентних відношень для розв'язків рівняння Беселя (циліндрових функцій).

Якщо ненульову константу λ виділити неможливо, рівняння має нульове власне значення $\lambda=0$, то рекурентні відношення для його розв'язків можуть бути отримані за узагальненою (складнішою) формулі перетворень. Цей узагальнений випадок вивчається в Другій базовій теоремі побудови рекурентних відношень для розв'язків рівняння Штурма-Ліувіля.

Для зведення неоднорідного диференціального рівняння так само використовуються формули Теореми 1.

§ 2. Отримання рекурентних відношень для розв'язків рівняння Штурма-Ліувіля з ненульовим власним значенням

Рекурентні відношення для однорідних диференціальних рівнянь другого порядку з ненульовим власним значенням. Перша базова теорема

Звичайні лінійні диференціальні рівняння другого порядку широко використовуються в прикладних задачах сучасної математичної фізики.

Крім того, метод розділення змінних в диференціальних рівняннях із частинними похідними при їх аналітичному рішенні часто приводить до рівнянь власне такого роду.

При вирішенні рівнянь другого порядку досить часто доводиться розглядати диференціальні рівняння першого порядку. Тому важливість диференціальних рівнянь першого і другого порядку для сучасної прикладної математики незаперечна, інтерес до неї дослідників досі не згасає.

Існують чотири основні загальноприйняті **методи** розв'язання диференціальних рівнянь, що мають змінні коефіцієнти.

1. Пряме чисельне розв'язання (аналітичний або з використанням комп'ютерних технологій). Це може потребувати великої праці та вимагати серйозних зусиль, але у багатьох випадках просто немає іншого вибору.

2. Розв'язання за допомогою степеневих та інших рядів, що сходяться (або за ортонормованим базисом функцій, в узагальненому сенсі).

3. Шляхом підстановки інтегралів різного вигляду.

4. Асимптотичними розв'язками і розкладеннями.

Автор пропонує п'ятий спосіб отримання розв'язків для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку — метод рекурентних відношень.

Його застосування буде здійснено для дослідження рівняння Беселя і прямого отримання рекурентних відношень циліндрових функцій.

Украй ефективним застосування методу рекурентних відношень є саме у тому випадку, коли нам відомий один з двох частинних лінійно-незалежних розв'язків лінійного диференціального рівняння другого порядку. Він може бути отриманий або аналітично, або з використанням чисельних методів.

За допомогою даного методу можуть бути отримані безкінечні ланцюжки, що лінійним чином пов'язують неочевидні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь другого порядку один з одним, і зокрема розв'язки рівняння Штурма-Ліувіля.

У теорії спеціальних функцій і лінійних диференціальних рівнянь другого порядку часто стикаються з тим, що один з двох частинних лінійно-незалежних розв'язків диференціального рівняння або очевидний, або достатньо легко знаходиться. Проте практичне значення цього розв'язку раніше не розглядалося і вважалося неістотним за значенням.

Для розв'язку практичних задач потрібне відшукання другого частинного лінійно-незалежного розв'язку, що часто є неочевидним. У найбільш складних випадках цей розв'язок не може бути отриманий комбінацією елементарних функцій. Тому в більшості випадків простий перший частинний лінійно-незалежний розв'язок рівняння залишався поза увагою.

У методі рекурентних відношень основна увага приділяється саме цьому простому (очевидному) частинному розв'язку диференціального рівняння.

У тому випадку, коли один з частинних розв'язків або заздалегідь відомий, або очевидний та є таким, що достатньо легко знаходиться, даний метод може бути з успіхом застосований.

Для того, щоб застосувати метод рекурентних відношень, ми спочатку повинні звести невироджене лінійне диференціальне рівняння другого порядку до окремого випадку — рівняння Штурма-Ліувіля з використанням Теореми 1. Далі ми досліджуємо отримане рівняння Штурма-Ліувіля.

Теорема 2. Перша базова теорема. *Для розв'язку початкового рівняння Штурма-Ліувіля з невиродженим власним значенням* λ:

$$y''(x)+g(x)y(x)=\lambda y(x) \tag{1.2.1}$$

де $g(x)$ *— деяка функція змінного* x
та λ *— ненульове власне значення* $\lambda \neq 0$
існує рекурентне відношення вигляду

$$z(x)=A(x)y(x)-y'(x) \tag{1.2.2}$$

$$\text{де } A(x)=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \tag{1.2.3}$$

виконується тотожність:

$$A^2(x)+A'(x)=-g(x)+\mu \tag{1.2.4}$$

Ми можемо записати відношення в іншій формі:

$$z(x)=-\varphi(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{\varphi(x)}\right) \tag{1.2.5}$$

Функція $\varphi(x)$ *є невиродженим ненульовим частинним лінійно-незалежним розв'язком рівняння (1.2.1), можливо з іншим власним значенням — деякою константою* μ:

$$\varphi''(x)+g(x)\varphi(x)=\mu\varphi(x) \tag{1.2.6}$$

за умови $\varphi(x)\neq\chi y(x)$, *где* $\chi=const$

Рекурентне відношення вигляду (1.2.2) і (1.2.5) приводить до результуючого рівняння Штурма-Ліувіля:

$$z''(x)+q(x)z(x)=\lambda z(x) \tag{1.2.7}$$

для якого виконується:

$$q(x)=g(x)+2A'(x) \tag{1.2.8}$$

$$q(x)=-g(x)-2A^2(x)+2\mu \tag{1.2.9}$$

Примітка. Для пошуку рекурентних відношень в цій теоремі ми використовуємо класичне перетворення Дарбу (1.2.5). **Ми не повинні** використовувати цю теорему і перетворення Дарбу для виродженого випадку, коли не можна виділити ненульове власне значення λ.

Умова невироджуваності λ є істотною та критичною при доказі даної теореми. Навіть у тому випадку, коли ланцюжки отриманих рівнянь

$$y_n''(x)+g_n(x)y_n(x)=\lambda_n y_n(x)$$

приводять нас до умови $\lambda_n \to 0$ при $n\to\infty$,

потрібно відмовитись від виконання граничного переходу по λ_n. Для виродженого випадку $\lambda=0$ використовуються модифіковані формули та відношення, які будуть стисло викладені у Висновку.

Доказ. При проведенні доказу ми вважаємо, що всі необхідні похідні та інтеграли існують і не вироджені. Виконаємо лінійну заміну:

$$z(x)=A(x)y(x)+B(x)y'(x) \tag{1.2.10}$$

і підставимо її в результуюче рівняння

$$\lambda z(x)=z''(x)+q(x)z(x) \tag{1.2.7}$$

Ми отримуємо:

$$\begin{aligned}&\lambda(A(x)y(x)+B(x)y'(x))=\\&=A''(x)y(x)+2A'(x)y'(x)+A(x)y''(x)+\\&+B''(x)y'(x)+2B'(x)y''(x)+B(x)y'''(x)+\\&+q(x)A(x)y(x)+q(x)B(x)y'(x)\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

Значення $y''(x)$ очевидно з рівняння (1.2.1):

$$y''(x)=(\lambda-g(x))y(x)$$

Для того, щоб набути значення третьої похідної $y'''(x)$, ми повинні продиференціювати початкове рівняння, з якого отримуємо:

$$y'''(x)=(\lambda-g(x))y'(x)-g'(x)y(x) \tag{1.2.12}$$

Підставимо отримані вирази для другої та третьої похідної функції $y(x)$, щоб позбутися від похідних старшого порядку в відношенні (1.2.11)

$$\lambda(A(x)y(x)+B(x)y'(x))=$$
$$=A''(x)y(x)+2A'(x)y'(x)+A(x)(\lambda-$$
$$-g(x))y(x)+B''(x)y'(x)+2B'(x)(\lambda-g(x))y(x)+$$
$$+B(x)((\lambda-g(x))y'(x)-g'(x)y(x))+$$
$$+q(x)A(x)y(x)+q(x)B(x)y'(x) \qquad (1.2.12)$$

Нам необхідно забезпечити тотожну рівність (1.2.12) для всіх значень змінної $\boldsymbol{x}$, для яких розв'язок диференціального рівняння існує. Це забезпечується тотожною рівністю потенціалів:

$$\begin{array}{l|l}
\lambda y(x) & A(x)=A(x)+2B'(x) \qquad (1.2.13)\\
\lambda y'(x) & B(x)=B(x) \text{ — тотожність } \forall x\\
y(x) & 0=A''(x)-g(x)A(x)-2g(x)B'(x)-\\
 & \qquad -g'(x)B(x)+q(x)A(x)\\
y'(x) & 0=2A'(x)+B''(x)-g(x)B(x)+q(x)B(x)
\end{array}$$

При розгляді рівняння Штурма-Ліувіля ми вважали, що власне значення початкового рівняння невироджене, тобто $\lambda\neq 0$.

Дана вимога є істотною при доведення цієї теореми, оскільки дозволяє накласти дуже жорстку додаткову умову і тому явно отримати значення $B(x)$.

Для забезпечення тотожної рівності потенціалу при $\lambda y(x)$, де λ невироджений, необхідно вимагати, щоб $B'(x)=0$ при всіх значеннях змінної x.

Ми отримали звичайне диференціальне рівняння першого порядку, яке має явний розв'язок, що дорівнює константі при всіх значеннях змінної x:

$$B'(x)=0 \Rightarrow B(x)=c, \text{ де } c=\text{const} \qquad (1.2.14)$$

$\forall x$, на яких розв'язок початкового рівняння Штурма-Ліувіля визначений та існує.

Оскільки рівняння (1.2.14) однорідне, то єдиність його розв'язку приймається з точністю до деякої константи, тому надалі ми можемо вибрати зручне для нас її значення. Таким чином, систему рівнянь (1.2.13) можна спростити і записати у вигляді:

$$\begin{array}{l|l}
y(x) & 0=A''(x)+A(x)(q(x)-g(x))-cg'(x)\\
y'(x) & 0=2A'(x)+c(q(x)-g(x)) \qquad (1.2.15)
\end{array}$$

де c — деяка довільна ненульова константа.

Ми отримали систему лінійних диференціальних рівнянь відносно двох невідомих функцій одного змінного: $A(x)$ та $q(x)$. Рівняння в однорідній системі рівнянь (1.2.15) лінійно-незалежні, розв'язок існує і він єдиний з точністю до константи.

Вирішемо систему рівнянь (1.2.15), виразив значення невідомої функції $q(x)$, яка входить в систему явно без своїх похідних:

$$\begin{array}{l|l}
y(x) & g(x)+(cg'(x)-A''(x))/A(x)=q(x)\\
y'(x) & g(x)-2A'(x)/c=q(x) \qquad (1.2.16)
\end{array}$$

Віднімемо від першого рівняння системи (1.2.16) друге рівняння, виключивши $q(x)$, отримаємо одне рівняння:

$$(cg'(x)-A''(x))/A(x)+2A'(x)/c=0$$

Ми повинні припустити, що потенціал $A(x)$ тотожно не вироджується в нуль для всіх значеннях змінної x. Інакше ми не зможемо побудувати невироджене рекурентне відношення. Таким чином, ми отримуємо рівняння для функції $A(x)$:

$$c^2g'(x)-cA''(x)+2A'(x)A(x)=0 \qquad (1.2.17)$$

Це рівняння є класичним диференціальним рівнянням, яке може бути легко вирішене в явній формі з використанням методу інтеграції по частинах. Перепишемо отримане рівняння (1.2.17) в еквівалентній формальній формі:

$$\frac{d}{dx}(c^2g(x)-cA'(x))+\frac{d}{dx}(A^2(x))=0 \qquad (1.2.18)$$

Формально проінтегруємо отримане рівняння по змінній x і отримаємо:

$$c^2 g(x) - cA'(x) + A^2(x) = \mu \qquad (1.2.19)$$

де μ — деяка довільна константа.

Оскільки константа, що входить до рівняння, через його однорідність (1.2.14) є довільною, ми можемо вибрати таке її значення, щоб

$$|c| = 1 \text{ і відповідно } c^2 = 1,\ c = \mp 1 \qquad (1.2.20)$$

Тому рівняння (1.2.19) буде записано у вигляді:

$$A^2(x) - cA'(x) = \mu - g(x) \qquad (1.2.21)$$

Ми отримали нелінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Використаємо метод заміни змінних і покладемо

$$A(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \qquad \text{де } \varphi(x) \text{ — функція} \qquad (1.2.3)$$

Підставимо заміну в рівняння (1.2.21) і отримаємо:

$$\left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2 - c\,\frac{\varphi''(x)\varphi(x) - \varphi'(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} = \mu - g(x)$$

Після спрощення отримуємо наступне рівняння:

$$-c\varphi''(x) = \varphi(x)(\mu - g(x))$$

Виходячи з положення (1.2.20) і поклавши $c = -1$, ми отримуємо рівняння Штурма-Ліувіля з початковим потенціалом $g(x)$ і власним значенням μ:

$$\varphi''(x) + g(x)\varphi(x) = \mu\varphi(x) \qquad (1.2.6)$$

Як говорилося раніше, існує цілий клас лінійних диференціальних рівнянь другого порядку, для яких можна достатньо легко знайти очевидний частинний розв'язок, який сам по собі не має практичного значення. Простий розв'язок також може бути заданий заздалегідь.

Рівняння (1.2.6) показує, що для побудови рекурентних відношень неочевидних розв'язків рівняння Штурма-Ліувіля необхідно знати другий (простий і очевидний)

розв'язок даного рівняння з іншим власним значенням μ, можливо відмінний від λ.

Якщо ми знаємо такий розв'язок в явній формі, то рекурентне відношення може бути єдиним чином записано у формі

$$z(x) = A(x)y(x) - y'(x) \qquad (1.2.2)$$

$$\text{або } z(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}y(x) - y'(x) \qquad (1.2.22)$$

Дане рекурентне відношення є перетворенням Дарбу для рівняння Штурма-Ліувіля. Воно може бути записане у формі оператора (1.2.5).

В ході доказу також були отримані відповідні рівняння (1.2.4), що пов'язували, (1.2.8) і (1.2.9) для $q(x)$. Таким чином, ***теорема доказана.***

Відзначимо, що представлення частинного незалежного розв'язку рівняння в явній формі є надмірною вимогою і може бути істотно ослаблене — тому що для пошуку в явній формі рекурентних відношень достатньо лише вирішити нелінійне диференціальне рівняння першого порядку:

$$A^2(x) + A'(x) = -g(x) + \mu \qquad (1.2.4)$$

з деякою довільною константою μ.

Якщо вдасться отримати розв'язок цього нелінійного диференціального рівняння першого порядку в явній формі, то пошук один з двох лінійно-незалежних розв'язків початкового рівняння Штурма-Ліувіля з невиродженим власним значенням є зовсім необов'язковим.

Існування й невиродженість всіх похідних і інтегралів, необхідних для коректного викладу і доведення теореми 2, повинні бути окремо доведені для кожного конкретного випадку практичного застосування теореми 2, оскільки в ході доказу передбачалося існування і невиродженість цих похідних та інтегралів в загальному сенсі.

Щоб отримати рекурентні відношення для однорідних диференціальних рівнянь другого порядку, за допомогою теореми 1 їх спочатку необхідно звести до вигляду (1.2.1).

§ 3. Гамма-функція Ейлера, короткий огляд

Зараз ми відвернемося від теми диференціальних рівнянь для короткого опису гамма-функції Ейлера, що безпосередньо використовується в представленні розв'язків рівняння Беселя.

Гамма-функція Ейлера є узагальненням поняття факторіалу, поширеного з натуральних чисел на весь числовий ряд. Відомо, що для натуральних чисел факторіал описується відношенням:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ \dots \ \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \qquad (1.3.1)$$

Для факторіалу виконується основне рекурентне відношення:

$$n! = n \cdot (n-1)! \qquad (1.3.2)$$

Гамма-функцією Ейлера називається інтеграл Ейлера II роду, для якого виконується аналогічне рекурентне відношення:

$$\Gamma(u+1) = u\Gamma(u) \qquad (1.3.3)$$

Для всіх натуральних чисел n виконується:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{та} \quad \Gamma(1) = 1 \qquad (1.3.4)$$

Гамма-функція Ейлера для змінних t і дійсних та комплексних параметрів u визначається через невласний інтеграл, який сходиться, і відношення:

$$\Gamma(u+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^u dt \qquad (1.3.5)$$

$$\Gamma(u) = \lim_{m\to\infty} \frac{m!\, m^u}{u\,(u+1)\dots(u+m)} \qquad (1.3.6)$$

$$\Gamma(u) \cdot \Gamma(1-u) = \pi / \sin \pi u \qquad (1.3.7)$$

Розділ II
Рівняння Беселя, функції Беселя та інші циліндрові функції

§ 1. Рекурентні відношення для функцій Беселя

Розглянемо узагальнене однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$x^2 z''(x) + x z'(x) + (x^2 - \nu^2) z(x) = 0 \qquad (2.1.1)$$

де ν — деяка константа (можна вважати, що ця константа ненегативна $\nu \geqslant 0$), а $y(x)$ — функція.

Це рівняння не інтегрується при будь-якому значенні параметра ν за допомогою елементарних функцій. Ми розглядатимемо розв'язок цього рівняння як самостійні функції аргументу x. Ці функції, залежні від змінній x і параметра ν, називаються функціями Беселя або циліндровими функціями, а рівняння (2.1.1) називається класичним рівнянням Беселя.

Рівняння Беселя також записується у формі:

$$z''(x) + \frac{1}{x} z'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) z(x) = 0 \qquad (2.1.2)$$

Вивчаючи рівняння (2.1.2), можна відзначити, що його коефіцієнти безперервні усюди, окрім точки $x=0$, а само рівняння — невироджене лінійне.

Багато прикладних задач, розв'язок яких пов'язаний з рівняннями Лапласа, хвилевими рівняннями, рівняннями теплопровідності, системами хвильових рівнянь в сферичних, конічних і циліндрових координатах, деякі інші рівняння в частинних похідних при розділенні змінних приводить до рівняння Беселя і циліндрових функцій дійсного і комплексного змінного.

Функції Беселя продовжують привертати до себе увагу дослідників, оскільки при розкладенні в ряд по ним забезпечують швидку і коректну збіжність. Вони активно використовуються сьогодні.

У цьому розділі ми отримаємо класичні рекурентні відношення для функцій Беселя з позитивним параметром ν, виходячи тільки із загального виду рівняння Беселя. Для цього ми зведемо рівняння Беселя до рівняння Штурма-Ліувіля за допомогою теореми 1, а потім явно запишемо рекурентні відношення за допомогою теореми 2 (Першої базової теореми).

Позначимо $J_\nu(x)$ обмежений в нулі розв'язок рівняння Беселя, який називається функцією Беселя, де

$$\lim_{x\to 0} |J_\nu(x)| < \infty \quad \text{и} \quad \nu \geqslant 0 \tag{2.1.3}$$

Лема 1. *Класичне рівняння Беселя вигляду*

$$x^2 J_\nu''(x) + x J_\nu'(x) + (x^2 - \nu^2) J_\nu(x) = 0 \tag{2.1.4}$$

може бути приведено до рівняння Штурма-Ліувіля

$$y_\nu''(x) - \frac{(\nu - 1/2)(\nu + 1/2)}{x^2} y_\nu(x) = -y_\nu(x) \tag{2.1.5}$$

за допомогою заміни виду: $y_\nu(x) = \sqrt{x} J_\nu(x)$ (2.1.6)

Доказ. Застосуємо теорему 1, яка зводить звичайне однорідне диференціальне рівняння другого порядку, окремим випадком якого є рівняння Беселя, до рівняння Штурма-Ліувіля.

$$f_2(x) z''(x) + f_1(x) z'(x) + f_0(x) z(x) = 0 \tag{1.1.1}$$

де $z(x) = J_\nu(x)$ — функція Беселя

й $f_2(x) = x^2$; $f_1(x) = x$, $f_0(x) = x^2 - \nu^2$ (2.1.7)

Рівняння Штурма-Ліувіля матиме вигляд:

$$y_\nu''(x) + g_\nu(x) y_\nu(x) = \lambda_\nu y_\nu(x) \tag{2.1.8}$$

Відповідно до (1.1.3) і (1.1.4) заміна прийме вигляд:

$$J_\nu(x) = P_\nu(x) y_\nu(x), \text{ где } P_\nu(x) = exp\left(-\frac{1}{2}\int^x \frac{1}{\xi} d\xi\right)$$

Таким чином, для всіх значень параметра V ми отримаємо відношення вигляду:

$$P_\nu(x) = 1/\sqrt{x} \quad \text{для } \forall\nu$$

яке дозволяє отримати заміну (2.1.6) в явному вигляді. Відповідні потенціал і власне значення рівняння Штурма-Ліувіля (1.1.2) виражається за формулою (1.1.5) з урахуванням прийнятих позначень (1.1.7) і (1.1.8):

$$\alpha_\nu(x) = f_1(x)/f_2(x) = 1/x$$

$$\beta_\nu(x) = f_0(x)/f_2(x) = 1 - \nu^2/x^2$$

Тоді $g_\nu(x) + \lambda_\nu = \beta_\nu(x) - \frac{1}{4}(\alpha_\nu^2(x) + 2\alpha_\nu'(x))$

$$= 1 - \nu^2/x^2 - (1/x^2 + 2(1/x)')/4$$

Звідси $g_\nu(x) + \lambda_\nu = 1 - \nu^2/x^2 + 1/4x^2$ (2.1.9)

або $g_\nu(x) + \lambda_\nu = 1 - (\nu - 1/2)(\nu + 1/2)/x^2$

Ми отримали потенціал і власне значення для рівняння Штурма-Ліувіля (2.1.5), до якого за допомогою заміни (2.1.6) ми звели рівняння Беселя (2.1.4), використовуючи теорему 1, доведену в розділі I.

Відношення (2.1.9) однозначно дозволяє виділити ненульове власне значення λ_ν, що дорівнює -1 при всіх значеннях параметра $\forall\nu$, і потенціалу:

$$g_\nu(x) = -(\nu - 1/2)(\nu + 1/2)/x^2, \quad \lambda_\nu = -1 \tag{2.1.10}$$

Ми звели рівняння Беселя (2.1.4) до рівняння Штурма-Ліувіля з невиродженим власним значенням, що дозволяє застосувати теорему 2. ***Лема доказана.***

Для функцій існують залежності:

$$y_\nu(x) = x^{1/2} J_\nu(x) \quad \text{и} \quad J_\nu(x) = x^{-1/2} y_\nu(x) \tag{2.1.11}$$

і коефіцієнти цих відношень прості (елементарні степеневі функції).

Відзначимо, що в доказі при виділенні ненульового власного значення рівняння ми не використовували значення параметра ν. Можна також відзначити, що при параметрах ν і $-\nu$ рівняння Беселя і Штурма-Ліувіля є незмінним. Тому для зручності ми вважаємо, що значення параметра ν в подальших викладах завжди ненегативне (позитивне або нуль).

Отримане в лемі 1 рівняння (2.1.5) з невиродженими власними значеннями дозволяє на підставі теореми 2 (Першої базової теореми) явно виписати класичні рекурентні відношення для розв'язків допоміжного рівняння Штурма-Ліувіля (2.1.5) і класичного рівняння Беселя (2.1.4).

Теорема 3. *Для класичних рівнянь Беселя:*

$$x^2 J_\nu''(x) + x J_\nu'(x) + (x^2 - \nu^2) J_\nu(x) = 0 \qquad (2.1.4)$$

з ненегативним параметром $\nu \geqslant 0$ *та* (2.1.3)

обмеженими в нулі розв'язками $\lim\limits_{x\to 0} |J_\nu(x)| < \infty$

існують рекурентні відношення вигляду:

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_\nu'(x) \qquad (2.1.12)$$

$$J_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J_\nu'(x) \qquad (2.1.13)$$

і ці відношення можуть бути явно отримані, виходячи із загального виду класичного рівняння Беселя.

Доказ. Застосуємо теорему 2 до рівняння Штурма-Ліувіля, до якого було зведено класичне рівняння Беселя в лемі 1:

$$y_\nu''(x) + g_\nu(x) y_\nu(x) = \lambda_\nu y_\nu(x) \qquad (2.1.8)$$

де $g_\nu(x) = -(\nu - 1/2)(\nu + 1/2)/x^2$

$$\lambda_\nu = -1 \quad \text{для } \nu \geqslant 0 \qquad (2.1.10)$$

Для отримання рекурентних відношень скористаємося ослабленою умовою теореми 2:

$$A^2(x) + A'(x) = -g_\nu(x) + \mu \qquad (1.2.4)$$

де μ — деяка константа, яка може бути довільно задана і яка не співпадає з власним значенням (2.1.10) базового рівняння Штурма-Ліувіля.

Ми отримали наступне нелінійне диференціальне рівняння першого порядку:

$$A^2(x) + A'(x) = (\nu - 1/2)(\nu + 1/2)/x^2 + \mu$$

Якщо ми покладемо $\mu = 0$, то це рівняння легко в явному вигляді вирішується в елементарних функціях:

$$A^2(x) + A'(x) = (\nu - 1/2)(\nu + 1/2)/x^2$$

Використаємо метод невизначених коефіцієнтів.

Якщо $A(x) = \omega/x$, де ω— деяка постійна, то після підстановки ми отримаємо вираз:

$$\omega^2/x^2 - \omega/x^2 = (\nu - 1/2)(\nu + 1/2)/x^2$$

Звідси: $\omega^2 - \omega + (1/4 - \nu^2) = 0$

Очевидно, дане диференціальне рівняння першого порядку має два лінійно-незалежні розв'язки, відповідних парі ω:

$$A(x) = (1/2 + \nu)/x \qquad (2.1.14)$$

$$A(x) = (1/2 - \nu)/x \qquad (2.1.15)$$

Ми довели існування рекурентних відношень з невиродженими коефіцієнтами, що мають особливість в нулі:

$$z(x) = A(x) y_\nu(x) - y_\nu'(x) \qquad (1.2.2)$$

Відзначимо, що для отримання рекурентних відношень не потрібно знати ще один розв'язок рівняння Штурма-Ліувіля, оскільки ми отримали всі значення потенціалів для пари лінійно-незалежних рекурентних відношень.

Тепер розглянемо, які потенціали і власні значення можуть бути отримані, виходячи для даних відношень. Ми отримали нове рівняння Штурма-Ліувіля:

$$z''(x) + q(x) z(x) = \lambda_\nu z(x) \qquad (1.2.7)$$

где $q(x) = g_\nu(x) + 2A'(x)$ (1.2.8)

Якщо ми підставимо отримані відношення (2.1.14) і (2.1.15) для $A(x)$) у відношення (1.2.8), ми отримаємо пару потенціалів рівняння Штурма-Ліувіля:

$$q(x) = -(\nu+1/2)(\nu+3/2)/x^2 \qquad (2.1.16)$$

$$q(x) = -(\nu-1/2)(\nu-3/2)/x^2 \qquad (2.1.17)$$

Значення цього потенціалу (2.1.16) повністю співпадає із значенням потенціалу рівняння Штурма-Ліувіля (2.1.8), відповідного класичному рівнянню Беселя з параметром $(\nu+1)$

$$g_{\nu+1}(x) = -(\nu+1/2)(\nu+3/2)/x^2 \qquad (2.1.18)$$

Це виконується для рекурентного відношення:

$$z(x) = y_{\nu+1}(x) = A_\nu(x) y_\nu(x) - y_\nu{}'(x) \qquad (2.1.19)$$

де $A_\nu(x) = (\nu+1/2)/x$ (2.1.14)

Аналогічно потенціал (2.1.17) співпадає з потенціалом, відповідним параметру $(\nu-1)$) для рівняння (2.1.8)

$$g_{\nu-1}(x) = -(\nu-1/2)(\nu-3/2)/x^2 \qquad (2.1.20)$$

Це виконується для рекурентного відношення:

$$z^*(x) = y^*_{\nu-1}(x) = A^*_\nu(x) y_\nu(x) - y_\nu{}'(x) \qquad (2.1.21)$$

де $A^*_\nu(x) = -(\nu-1/2)/x$ (2.1.15)

Ми отримали пару рекурентних відношень (2.1.19) і (2.1.21). Через однорідність початкового і результуючого рівнянь отримані з використанням рекурентних відношень розв'язки можуть відрізнятися один від одного на константу. Знайдемо її для того, щоб отримані рівняння строго відповідали один одному.

Перепишемо (2.1.21) для параметра $(\nu+1)$

$$y^*_\nu(x) = A^*_{\nu-1}(x) y_{\nu+1}(x) - y_{\nu+1}{}'(x) \qquad (2.1.22)$$

де $A^*_{\nu-1}(x) = (-1/2-\nu)/x$ (2.1.23)

Через однорідність розв'язків рівняння

$y^*_\nu(x) = c y_\nu(x)$, де c — константа (2.1.24)

Підставивши (2.1.24) у (2.1.22), отримаємо:

$$y^*_\nu(x) = c y_\nu(x) = A^*_{\nu-1}(x) y_{\nu+1}(x) - y_{\nu+1}{}'(x)$$

Використаємо вираз (2.1.19) і підставимо його в отримане відношення для визначення константи c:

$$c y_\nu(x) = A^*_{\nu-1}(x)\left(A_\nu(x) y_\nu(x) - y_\nu{}'(x)\right) -$$
$$-\left(A_\nu{}'(x) y_\nu(x) + A_\nu(x) y_\nu{}'(x) - y_\nu{}''(x)\right)$$

Відповідно до рівняння Штурма-Ліувіля (2.1.8) і (2.1.9) підставимо значення другої похідної, спростимо отриманий вираз і отримаємо тотожність:

$$\begin{array}{l|l} y_\nu(x) & c = A^*_{\nu-1}(x) A_\nu(x) - A_\nu{}'(x) - g_\nu(x) + \lambda_\nu \\ y_\nu{}'(x) & 0 = A^*_{\nu-1}(x) - A_\nu(x) \end{array}$$ — це тотожність

Спростивши вираз, отримуємо $c = \lambda_\nu = -1$ (2.1.25)

Таким чином, $y^*_\nu(x) = -y_\nu(x)$

Ми отримали пару рекурентних відношень, котрі задовольняють рівнянню Штурма-Ліувіля, до якого приводиться класичне рівняння Беселя, і ця пара рекурентних відношень забезпечує взаємно-однозначну відповідність розв'язків рівняння (2.1.8)

$$y_{\nu+1}(x) = \frac{\nu+1/2}{x} y_\nu(x) - y_\nu{}'(x) \qquad (2.1.26)$$

$$y_{\nu-1}(x) = \frac{\nu-1/2}{x} y_\nu(x) + y_\nu{}'(x) \qquad (2.1.27)$$

Скориставшись результатами леми 1 й підставив вираз (2.1.11), що явно зв'язує розв'язки рівняння Штурма-Ліувіля і відповідні ним розв'язки рівняння Беселя, після спрощення виразів отримаємо класичні рекурентні відношення, що зв'язують функції Беселя (2.1.12) і (2.1.13) в теоремі 3. ***Теорема доказана.***

Відомі рекурентні відношення для функцій Беселя були отримані суто природнім шляхом, виходячи виключно із загального виду рівняння Беселя.

Ми довели існування ланцюжків рекурентних відношень для функцій Беселя, скориставшись методом рекурентних відношень для розв'язків рівняння Штурма-Ліувіля, відповідного рівнянню Беселя з невиродженими власними значеннями, та Першою базовою теоремою (теоремою 2). Ми скористалися дещо ослабленими умовами і не шукали другий частинний лінійно-незалежний розв'язок рівняння Штурма-Ліувіля з іншими власними значеннями, не відповідними функціям і рівнянню Беселя.

Застосування теореми 2 звелося до розв'язання простого нелінійного диференціального рівняння першого порядку, який був отриманий в елементарних степеневих функціях методом невизначених коефіцієнтів.

$$x^2 J_\nu''(x) + x J_\nu'(x) + (x^2 - \nu^2) J_\nu(x) = 0 \qquad (2.1.4)$$

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_\nu'(x) \qquad (2.1.12)$$

$$J_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J_\nu'(x) \qquad (2.1.13)$$

Очевидно, що отримані рекурентні відношення дозволяють елементарно виписати ще одну пару рекурентних відношень, пов'язуючі три функції Беселя, якщо складати або віднімати отримані вирази:

$$2 J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) \qquad (2.1.28)$$

$$J_{\nu-1}(x) - 2\frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu+1}(x) = 0 \qquad (2.1.29)$$

Параметр ν для рівняння і функцій Беселя прийнято називати індексом функцій Беселя.

Ці функції в літературі також прийнято називати функціями Беселя 1 роду.

§ 2. Функції Беселя з напівцілим індексом

Функції Беселя з напівцілим індексом (порядок яких рівний цілому числу з половиною) примітні тим, що для них може бути виписаний вираз через елементарні тригонометричні та степеневі функції в явному вигляді, а не у формі асимптотичних розкладень. Цей доказ був приведений ще Ейлером, виходячи із загального виду розкладень розв'язків рівняння Беселя і властивостей гамма-функцій Ейлера.

Використаємо новий підхід. Розглянемо випадок параметра ν (індексу функцій Беселя), при якому

$$\nu = n + 1/2 \quad \text{при } n \text{ — целые числа} \qquad (2.2.1)$$

Скористаємося отриманими рекурентними відношеннями для пошуку розв'язків рівнянь Беселя з напівцілим індексом в явному вигляді. Для напівцілого індексу рівняння Беселя і відповідне йому рівняння Штурма-Ліувіля відповідно до леми 1 прийме вигляд:

$$x^2 J_\nu''(x) + x J_\nu'(x) + (x^2 - \nu^2) J_\nu(x) = 0 \qquad (2.2.2)$$

$$y_n''(x) - \frac{n(n+1)}{x^2} y_n(x) = -y_n(x) \qquad (2.2.3)$$

$$y_n(x) = \sqrt{x} J_\nu(x) \quad \text{где } \nu = n + 1/2 \qquad (2.2.4)$$

Розглядаючи наведене рівняння Штурма-Ліувіля (2.2.3), легко відзначити, що при нульовому значенні індексу n рівняння вироджується в елементарне:

$$y_0''(x) = -y_0(x) \quad \text{при } n=0 \text{ и } \nu = 1/2 \qquad (2.2.5)$$

Зведення рівняння Беселя до простого рівняння вигляду (2.2.5) при $n=0$ однозначно та явно дозволяє відразу же отримати розв'язок рівняння Штурма-Ліувіля та відповідного йому рівняння Беселя у вигляді пари лінійно-незалежних рішень, виражених через тригонометричні та степеневі (елементарні) функції.

Загальний розв'язок (2.2.5) представлений у вигляді

$$y_0(x)=\gamma_0\sin x+\eta_0\cos x \tag{2.2.6}$$

де γ_0 та η_0 — деякі довільні константи.

Відповідно до леми 1 і (2.2.4) загальний розв'язок рівняння Беселя з напівцілим індексом $\nu=1/2$ може бути записаний у вигляді:

$$J_{1/2}(x)=\left(\gamma_0\sin x+\eta_0\cos x\right)/\sqrt{x} \tag{2.2.7}$$

Проводячи міркування в попередньому параграфі, ми припускали, що дані функції Беселя з довільним індексом не мають в нулі особливості та мають обмежений в нулі розв'язок. Щоб умова (2.1.3) виконувалася, ми повинні вимагати:

$$\lim_{x\to 0}|J_{1/2}(x)|<\infty \tag{2.2.8}$$

Тільки за умови $\eta_0=0$ ми отримаємо

$$\lim_{x\to 0}|J_{1/2}(x)|=\lim_{x\to 0}|\gamma_0\sin x/\sqrt{x}|<\infty$$

Граничне значення функції в нулі складе

$$\lim_{x\to 0}\left(J_{1/2}(x)\right)=\gamma_0\sqrt{x}=0 \quad \text{при } \eta_0=0 \tag{2.2.9}$$

Таким чином, ми показали, що обмежений в нулі розв'язок рівняння Беселя — функція Беселя 1 роду для напівцілого індексу $\nu=1/2$ може бути представлена в явному вигляді через тригонометричні та степеневі функції:

$$J_{1/2}(x)=\left(\gamma_0\sin x\right)/\sqrt{x} \tag{2.2.10}$$

У теоремі 3 було доведено, що для обмежених в нулі функцій Беселя існують рекурентні відношення, що зв'язують ці функції, й ці рекурентні відношення виражаються через елементарні (степеневі) функції та першу похідну.

$$J_{\nu+1}(x)=\frac{\nu}{x}J_\nu(x)-J'_\nu(x) \quad \text{где } \nu=n+1/2 \tag{2.1.12}$$

$$J_{\nu-1}(x)=\frac{\nu}{x}J_\nu(x)+J'_\nu(x) \quad \text{где } \nu=n+1/2 \tag{2.1.13}$$

Якщо функція Беселя (2.2.10) з напівцілим індексом обмежена на числовій осі та виражається через елементарні функції (степеневі та тригонометричні), то і перша похідна функції Беселя існує і також виражаються через елементарні функції.

На підставі отриманих результатів виразимо функцію Беселя з напівцілим індексом в явному вигляді. Для цього розглянемо оператор, зворотній до оператора рекурентної заміни (2.1.12).

У теоремі 3 ми довели існування і єдиність рекурентної форми (2.1.12) з точністю до деякої константи (через однорідність розв'язків даних рівнянь).

Лема 2. *Для рекурентного відношення*

$$J_{\nu+1}(x)=\frac{\nu}{x}J_\nu(x)-J'_\nu(x) \quad \text{де } \nu=n+1/2 \tag{2.1.12}$$

існує невироджений зворотній оператор

$$J_\nu(x)=-\int^x\frac{x^\nu}{\xi^\nu}J_{\nu+1}(\xi)\,d\xi \tag{2.2.11}$$

Доказ. Для доказу дійсної леми введемо формальний лінійний оператор для правої частини рекурентного відношення (2.1.12):

$$L_\nu\left(f(x)\right)=\left(\frac{\nu}{x}-\frac{d}{dx}\right)f(x) \tag{2.2.12}$$

Представимо рекурентне відношення (2.1.12) у формі формального лінійного оператора:

$$J_{\nu+1}(x)=L_\nu\left(J_\nu(x)\right) \tag{2.2.13}$$

Перетворимо формальний оператор, поклавши

$$A_\nu(x)=\frac{\varphi'_\nu(x)}{\varphi_\nu(x)} \quad \text{де } \varphi_\nu(x) \text{ — функція} \tag{2.2.14}$$

і де $L_\nu=\left(A_\nu(x)-\frac{d}{dx}\right)$ — оператор

Очевидно, що $A_\nu(x)=\dfrac{\varphi_\nu'(x)}{\varphi_\nu(x)}=\dfrac{\nu}{x}$ (2.2.15)

Ми отримали лінійне диференціальне рівняння першого порядку (2.2.15), розв'язком якого є елементарна степенева функція:

$\varphi_\nu(x)=x^\nu$ при всіх параметрах (2.2.16)

З урахуванням отриманого виразу рекурентне відношення (2.1.12) можна записати у формі:

$$J_{\nu+1}(x)=\frac{\varphi_\nu'(x)}{\varphi_\nu(x)}J_\nu(x)-J_\nu'(x)=$$

$$=\frac{\varphi_\nu'(x)J_\nu(x)-\varphi_\nu(x)J_\nu'(x)}{\varphi_\nu(x)}$$

Звідси $J_{\nu+1}(x)=-\varphi_\nu(x)\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{J_\nu(x)}{\varphi_\nu(x)}\right)$ (2.2.17)

З урахуванням отриманого виразу рекурентне відношення (2.1.17) можна записати у формальній формі:

$$\frac{J_{\nu+1}(x)}{\varphi_\nu(x)}=-\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{\varphi_\nu(x)}\right) \qquad (2.2.18)$$

Для отримання формального розв'язку формально проінтегруємо обидві частини отриманого рівняння (2.2.18), відповідного рекурентному відношенню (2.2.12):

$$\int^x \frac{J_{\nu+1}(\xi)}{\varphi_\nu(\xi)}d\xi=-\frac{J_\nu(x)}{\varphi_\nu(x)} \qquad (2.2.19)$$

Звідси $J_\nu(x)=-\displaystyle\int^x \frac{\varphi_\nu(x)J_{\nu+1}(\xi)}{\varphi_\nu(\xi)}d\xi$ (2.2.20)

Підставивши у вираз (2.2.20) отримане раніше значення функції $\varphi_\nu(x)$ на підставі (2.2.16), ми формально отримаємо зворотній оператор (2.2.11) до оператора рекурентних відношень для функцій Беселя (2.1.12).

Для коректного доказу існування невиродженого зворотнього оператора (2.2.11) потрібно окремо довести існування правого і лівого зворотнього оператора та їх тотожність. Щоб довести існування правого зворотнього оператора, підставимо знайдений раніше формальний зворотній оператор (2.2.11) в рекурентне відношення (2.1.12) та запишемо:

$$J_{\nu+1}(x)=\frac{\nu}{x}J_\nu(x)-J_\nu'(x)= \qquad (2.2.21)$$

$$=-\frac{\nu}{x}\int^x\frac{x^\nu}{\xi^\nu}J_{\nu+1}(\xi)d\xi+\frac{d}{dx}\int^x\frac{x^\nu}{\xi^\nu}J_{\nu+1}(\xi)d\xi$$

Очевидно, що після диференціювання по частинах виразу (2.2.21) відношення стає тотожним. Це доводить існування і коректність правого зворотнього оператора.

Існування і коректність лівого зворотнього оператора перевіряється аналогічним чином — шляхом підстановки рекурентного відношення для розв'язків рівнянь Беселя (2.1.12) у формального зворотнього оператора (2.2.20) з урахуванням подавання (2.2.14):

$$J_\nu(x)=-\int^x\frac{x^\nu}{\xi^\nu}J_{\nu+1}(\xi)d\xi=$$

$$=-\int^x\frac{\varphi_\nu(x)}{\varphi_\nu(\xi)}\left(\frac{\varphi_\nu'(\xi)}{\varphi_\nu(\xi)}J_\nu(\xi)-J_\nu'(\xi)\right)d\xi c$$

де $\varphi_\nu(x)=x^\nu$ отримана за (2.2.16) функція.

Для того, щоб коректно довести існування правого зворотнього оператора, використовується загальне представлення прямого і зворотнього операторів через $\varphi(x)$.

Відмітимо, що без використання узагальненого відношення і введених функцій (2.2.14) доказ існування правого зворотнього оператора був би менш очевидний. Використовуємо формальний метод інтеграції по частинах для інтеграла, формально представленого в правій частині відношення (2.2.22):

$$J_\nu(x) = \int^x \varphi_\nu(x) J_\nu(\xi)\, d\,\frac{1}{\varphi_\nu(\xi)} + \int^x \frac{\varphi_\nu(x)}{\varphi_\nu(\xi)}\, dJ_\nu(\xi) =$$

$$= \varphi_\nu(x)\, \frac{J_\nu(\xi)}{\varphi_\nu(\xi)}\bigg|^{x=\xi} - \int^x \frac{\varphi_\nu(x)}{\varphi_\nu(\xi)}\, dJ(\xi) +$$

$$+ \int^x \frac{\varphi_\nu(x)}{\varphi_\nu(\xi)}\, dJ(\xi) = J_\nu(x) \quad \text{— тотожність}$$

Єдиність правого зворотнього оператора забезпечується вибраною і доведеною раніше умовою (2.2.9) рівності нулю функції Беселя в нулі.

Довівши тотожність, невиродженість та існування правого і лівого зворотнього оператора, ми довели коректність і існування зворотнього оператора (2.2.11) для рекурентних відношень для обмежених в нулі розв’язків функції Беселя. ***Лема доказана.***

Користуючись лемою 2 про існування оператора, зворотнього до рекурентних відношень, можна отримати загальну класичну формулу функцій Беселя 1 роду з напівцілим індексом, обмежених в нулі.

Теорема 4. *Обмежені в нулі функції Беселя з напівцілим індексом можуть бути отримані через елементарні функції (степеневі та тригонометричні), використовуючи відношення вигляду:*

$$J_{n+1/2}(x) = (-1)^n x^{n+1/2} \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n \frac{\sin x}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \qquad (2.2.23)$$

де n — цілі ненегативні числа.

Доказ. Для доказу послідовно застосовуватимемо до функцій Беселя з напівцілим індексом зворотні оператори (2.2.11), отримані в лемі 2, а також метод математичної індукції. Ми отримали

$$J_{1/2}(x) = \sin \big/ \sqrt{x} \quad \text{з точністю до константи} \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$J_\nu(x) = -\int^x \frac{x^\nu}{\xi^\nu} J_{\nu+1}(\xi)\, d\xi \quad \text{де} \quad \nu = n + 1/2 \qquad (2.2.11)$$

Запишемо зворотній оператор функції Беселя:

$$J_{1/2}(x) = \sin x \big/ \sqrt{x} = \frac{\sin x}{x^{1/2}}$$

$$J_{1/2}(x) = -\int^x \frac{x^{1/2}}{\xi_1^{1/2}} J_{3/2}(\xi_1)\, d\xi_1 = \frac{\sin x}{x^{1/2}}$$

Звідси ми отримуємо відношення:

$$\frac{\sin x}{x} = -\int^x \frac{1}{\xi_1^{1/2}} J_{3/2}(\xi_1)\, d\xi_1$$

Раніше ми довели, що обмежені в нулі функції Беселя з напівцілим індексом можуть бути представлені кінцевим набором елементарних функцій — степеневих і тригонометричних, тому всі інтеграли, що розглядаються в теоремі, існують і всі операції, що проводяться над ними, коректні. Далі послідовно підставлятимемо в отримане рівняння зворотних операторів для кожних наступних функцій Беселя.

$$\frac{\sin x}{x} = \int^x \int^{\xi_1} \ldots \int^{\xi_{n-1}} (-1)^n \frac{\xi_1 \ldots \xi_{n-1}}{\xi_n^{n+1/2}} J_{n+1/2}(\xi_n)\, d\xi_n \ldots d\xi_1 \qquad (2.2.24)$$

Введемо оператор $\mathcal{D} = \dfrac{d}{x\,dx}$ (2.2.25)

До отриманого відношення (2.2.24) послідовно будемо застосовувати введений формальний оператор (2.2.25) і послідовно формально проінтегруємо це відношення

$$\frac{d}{x\,dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\int^{x}\int^{\xi_2}\ldots\int^{\xi_{n-1}}(-1)^n\,\frac{\xi_2\ldots\xi_{n-1}}{\xi_n^{n+1/2}}J_{n+1/2}(\xi_n)\,d\xi_n\ldots d\xi_2$$

$$\frac{d}{x\,dx}\ldots\frac{d}{x\,dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=(-1)^n\,\frac{J_{n+1/2}(x)}{x^{n+1/2}}$$

Продовжимо формальне інтегрування правих і лівих частин тотожності (2.2.24) оператором (2.2.25) доти, поки ми не позбавимося від усіх інтегральних виразів і отримаємо функцію Беселя з напівцілим індексом в явному вигляді (2.2.23). ***Теорема доказана.***

Примітка. У разі функцій Беселя з напівцілим індексом ми використовували те, що всі необхідні похідні та інтеграли існують і справедливо

$$\frac{d}{dx}\int^{x}f(\xi)\,d\xi=f(\xi)+c\qquad(c=0)\tag{2.2.26}$$

Проведемо розрахунок деяких функцій Беселя:

$$J_{3/2}(x)=(-1)\;x^{3/2}\left(\frac{d}{x\,dx}\right)\frac{\sin x}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi}}=$$

$$=(-1)\;x^{1/2}\;\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\;\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$J_{3/2}(x)=\sqrt{\frac{1}{x}}\;\left(\frac{\sin x}{x}\;-\cos x\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\tag{2.2.27}$$

З точністю до константи отриманий класичний вираз для функції Беселя 1 роду (обмежений в нулі невироджений розв'язок рівняння Беселя) з напівцілим індексом $\mathbf{3/2}$ з використанням явно доведеної теореми 4 і відношення (2.2.23).

§ 3. Асимптотична поведінка і явний вираз через степеневі та тригонометричні ряди функцій Беселя з напівцілим індексом

Для функцій Беселя 1 роду (обмежених в нулі) з напівцілими індексами окремий інтерес представляє вивчення формального диференціального оператора $\mathcal{D}$ (2.2.25), зведеного в цілу ступінь. Оператор дозволяє отримати формули асимптотичної поведінки даних функцій Беселя далеко від початку координат, при великих значеннях змінної, і явно виписати кінцеві ряди функцій Беселя з напівцілим індексом через степеневі та тригонометричні функції.

Отримаємо символічний вид формального диференціального оператора 3D натурального ступеня:

Твердження 1. *Формальний оператор*

$$\mathcal{D}f(x)=\left(\frac{d}{x\,dx}\right)f(x)\tag{2.2.25}$$

має загальний формальний вид:

$$\mathcal{D}^n=\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\Psi_k^{(n)}}{x^{2n-k}}\,\frac{d^k}{dx^k}\tag{2.3.1}$$

де $\Psi_k^{(n)}$ *— деякі числові константи.*

Доказ. Для доказу відмітимо, що при нульовому ступені оператор формально вироджується в тотожну одиницю. При першому ступені значення оператора (2.3.1) повністю співпадає з його видом з одиничним числовим коефіцієнтом.

Використаємо метод математичної індукції, вважаючи, що для всіх попередніх натуральних ступенів формального диференціального оператора $\mathcal{D}$ вираз (2.3.1) тотожно виконується.

Випишемо вираз (2.3.1) для ступеня $(n-1)$.

$$\mathcal{D}^{n-1} = \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Psi_k^{(n-1)}}{x^{2(n-1)-k}} \frac{d^k}{dx^k}$$

Застосуємо до виразу формальний оператор:

$$\mathcal{D}^n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)(2(n-1)-k)}{x^{2(n-1)-k+2}} \Psi_k^{(n-1)} \frac{d^k}{dx^k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Psi_k^{(n-1)}}{x^{2(n-1)-k+1}} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \qquad (2.3.2)$$

$$\mathcal{D}^n = \ldots + \sum_{k=2}^{n} \frac{\Psi_{k-1}^{(n-1)}}{x^{2(n-1)-k+2}} \frac{d^k}{dx^k}$$

Для тотожного виконання й існування оператора прирівняємо в отриманому (2.3.2) і початковому виразі (2.3.1) коефіцієнти при рівних ступенях і похідних, отримавши рекурентні залежності:

$$\begin{array}{l|l|l}
k=n & \dfrac{1}{x^n}\dfrac{d^n}{dx^n} & \Psi_n^{(n)} = \Psi_{n-1}^{(n-1)} \\[2ex]
k=1 & \dfrac{1}{x^{2n-1}}\dfrac{d}{dx} & \Psi_1^{(n)} = (-1)(2n-3)\,\Psi_1^{(n-1)} \\[2ex]
k & \dfrac{1}{x^{2n-k}}\dfrac{d^k}{dx^k} & \Psi_k^{(n)} = \Psi_{k-1}^{(n-1)} + \\
 & & \quad +(-1)(2(n-1)-k)\,\Psi_k^{(n-1)}
\end{array} \qquad (2.3.3)$$

Отримані рекурентні відношення для коефіцієнтів оператора дозволяють знайти значення параметрів формального диференціального оператора. Значень цих констант на підставі (2.3.3) можуть бути отримані явно або у формі рекурентних відношень:

$$\begin{cases} \Psi_n^{(n)} = 1 \quad \text{при всіх значеннях параметра} \\ \Psi_1^{(n)} = (-1)^{n-1}(2n-3)!! \\ \Psi_k^{(n)} = \Psi_{k-1}^{(n-1)} + (-1)\,(2(n-1)-k)\,\Psi_k^{(n-1)} \end{cases} \qquad (2.3.4)$$

Невиродженість оператора доводить існуванням приведених явних і рекурентних відношень (2.3.4) та їх невиродженість. ***Твердження доведене.***

Твердження 1 показує, що формальний диференціальний оператор (2.3.1), застосований до деякої функції, яка представлена в елементарних функціях, що диференціюються, дозволяє отримати кінцевий ряд, члени якого також представлені елементарними функціями.

Оператор (2.3.1) дозволяє явно вивчити асимптотичну поведінку функцій Беселя з напівцілим індексом на підставі результатів (2.2.23), отриманих в теоремі 4

Застосуємо формальний диференціальний оператор до результуючого виразу теореми 4, виходячи з

$$\frac{d^k}{dx^k}\frac{\sin x}{x} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i\, i!\, i!\,(k-i)!}{k!\; x^{i+1}} \frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}} \sin x$$

Помітимо, що отримані в цьому виразі похідні тригонометричних функцій — це також тригонометричні функції. Використовуючи (2.2.23)

$$J_{n+1/2}(x) = (-1)^n x^{n+1/2} \mathcal{D}^n \frac{\sin x}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \qquad (2.3.5)$$

Запишемо явний вираз для функцій Беселя:

$$J_{n+1/2}(x) = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{k} \frac{\Theta_{k,i}^{(n)}}{x^{1/2+n+i-k}} \frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}} \sin x \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\text{где } \Theta_{k,i}^{(n)} = \Psi_k^{(n)} \frac{(-1)^i\, i!\, i!\,(k-i)!}{k!} \qquad (2.3.6)$$

З відношення (2.3.6) можна припустити, що дана функція Беселя на безкінечності наближається до нуля. Для того, щоб знайти асимптотичну поведінку функцій Беселя з напівцілим індексом, потрібно відшукати коефіцієнт розкладення, який повільніше за інших убуває на безкінечності, а іншими (що більш швидко убувають) членами ряду можна знехтувати.

Ступінь членів, що входять в ряд, виражається через параметри $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i})$ відповідно $-(1/2+\boldsymbol{n}+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k})$, тому на безкінечності ряд (2.3.6) убуває. При значеннях $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{n}$ та $\boldsymbol{i}=0$ необхідний ступінь змінної складе $-1/2$.

Тому асимптотичне розкладення функцій Беселя з напівцілим індексом можна записати у вигляді:

$$J_{\boldsymbol{n}+1/2}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{(-1)^{\boldsymbol{n}}}{x^{1/2}}\,\frac{d^{\boldsymbol{n}}}{dx^{\boldsymbol{n}}}\sin x \qquad (2.3.7)$$

Формула (2.3.7) дозволяє припустити, що далеко від початку координат при наближенні змінної до безкінечності функції Беселя близькі до тригонометричних функцій sin x й cos x, оскільки їх зміна залежно від значення змінної носить коливальний характер.

Асимптотичний період коливань функцій Беселя наближається до класичного 2π. Проте амплітуда їх коливань поступово згасає і наближається до нуля.

Коливання функцій Беселя знаходяться в своєрідному коридорі, який при великих значеннях змінної поступово звужується і сходиться до нуля. На безкінечності ці функції Беселя вироджуються в нуль.

Через особливості такої асимптотичної поведінки дані функції Беселя ідеальні для опису будь-яких затухаючих процесів та фізичних процесів, що супроводжуються постійною втратою внутрішньої енергії системи (наприклад, втрати на охолоджування, опір, тертя та інші природні фактори).

Функції Беселя забезпечують дуже швидку та коректну збіжність розв'язків фізичних задач, що описують багато реальних процесів математичної фізики, які без зовнішньої підтримки поступово затухають на безкінечності або достатньо далеко від нуля.

§ 4. Функції Беселя з напівцілим індексом, необмежені в нулі

У попередніх розділах ми розглядали один з розв'язків рівняння Штурма-Ліувіля — функції Беселя з напівцілим індексом, обмежені в нулі.

Проте в ході міркувань було виявлено існування ще одного лінійно-незалежного розв'язку, що має необмежене значення в околі нуля. Розглянемо другий частинний випадок, при якому параметр (індекс функцій Беселя) приймає негативне значення.

$$x^2 J''_{-\nu}(x) + x J'_{-\nu}(x) + (x^2 - \nu^2)\, J_{-\nu}(x) = 0 \qquad (2.4.1)$$

Очевидно, що функції Беселя позитивного ν і негативного $-\nu$ параметрів з напівцілим індексом одночасно задовольняють рівнянню Беселя (2.1.1) та є двома частинними лінійно-незалежними розв'язками цього рівняння і дозволяють отримати загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння Беселя:

$$z(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x) \quad \text{где } \nu \geqslant 0 \qquad (2.4.2)$$

Раніше ми розглядали позитивне значення параметра в наведеному рівнянні Штурма-Ліувіля (2.1.5.), проте рівняння Беселя має сенс та є невиродженим і при негативному значенні параметра. При нульовому значенні індексу даних функцій Беселя воно вироджується в елементарне:

$$y_0''(x) = -y_0(x) \quad \text{при } n=0 \text{ и } \nu = -1/2 \qquad (2.4.3)$$

$$-\nu = -n - 1/2 \quad \text{при } n \text{ — цілі числа} \qquad (2.4.4)$$

Відповідно до (2.2.6), другий незалежний розв'язок рівняння Беселя, яке ми не розглянули раніше, може бути записаний у формі:

$$y_0(x) = \eta_0 \cos x \qquad (2.4.5)$$

$$J_{-1/2}(x) = (\eta_0 \cos x)\big/\sqrt{x} \qquad (2.4.6)$$

Для доведення теореми 3 ми насправді не використовували обмеженість в нулі функцій Беселя. Можна розповсюдити її результати на загальний випадок і скористатися отриманими результатами для знаходження рекурентних відношень при негативних значеннях параметра, оскільки була показана невиродженість і аналітичність цих функцій.

$$J_{\nu-1}(x)=\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x)+J'_{\nu}(x) \tag{2.1.13}$$

Підставимо у відношення негативний параметр:

$$J_{-\nu-1}(x)=\frac{-\nu}{x}J_{-\nu}(x)+J'_{-\nu}(x) \quad \text{де} \quad \nu\geqslant 0$$

або $$J_{-\nu-1}(x)=(-1)\left(\frac{\nu}{x}J_{-\nu}(x)-J'_{-\nu}(x)\right) \tag{2.4.7}$$

Відмітимо, що рекурентне відношення для необмежених в нулі частинних розв'язків рівняння Беселя співпадає з точністю до константи з рекурентним відношенням для обмежених в нулі частинних розв'язків рівняння Беселя (2.1.12).

Скористаємося ходом доказу леми 2. Абсолютно аналогічними міркуваннями (з точністю до константи) ми отримаємо доказ леми 3 для відношення (2.4.7) і зворотній оператор для рекурентної заміни з негативними параметрами.

Лема 3. *Для рекурентного відношення*

$$J_{-\nu-1}(x)=(-1)\left(\frac{\nu}{x}J_{-\nu}(x)-J'_{-\nu}(x)\right) \quad \text{де } \nu\geqslant 0 \tag{2.4.8}$$

існує невироджений зворотній оператор

$$J_{\nu}(x)=\int^{x}\frac{x^{\nu}}{\xi^{\nu}}\,J_{-\nu-1}(\xi)\,d\xi \tag{2.4.9}$$

Невироджений зворотній оператор дозволяє в явному вигляді отримати вираз в елементарних функціях (кінцевий ряд степеневих і тригонометричних функцій) для функцій Беселя з напівцілим негативним індексом, не обмежених в нулі.

Теорема 5. *Необмежені в нулі функції Беселя з напівцілим індексом можуть бути отримані через елементарні функції (степеневі та тригонометричні), використовуючи відношення вигляду:*

$$J_{-n-1/2}(x)=x^{n+1/2}\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^{n}\frac{\cos x}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{2.4.10}$$

де n — цілі ненегативні числа.

Примітка. У тому випадку, коли одне й те ж рекурентне відношення розглядається для двох частинних лінійно-незалежних розв'язків рівняння Беселя, рівняння можуть відрізнятися від приведених з точністю до константи. У міркуваннях, що приводяться, ми розділили обмежені та необмежені в нулі частинні розв'язки рівняння Беселя і розглянули їх окремо.

Запишемо явний вираз для функцій Беселя:

$$J_{-n-1/2}(x)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k}\frac{\Theta_{k,i}^{(n)}}{x^{1/2+n+i-k}}\frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}}\cos x\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\text{де} \quad \Theta_{k,i}^{(n)}=\Psi_{k}^{(n)}\frac{(-1)^{i}\,i!\,i!\,(k-i)!}{k!} \tag{2.4.11}$$

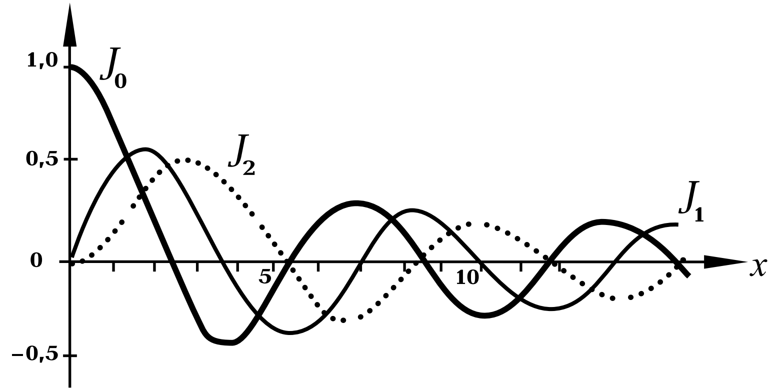
На підставі отриманого явного виду розв'язок рівняння Беселя з негативним напівцілим індексом, опишемо його асимптотичну поведінку при необмеженому зростанні змінної:

$$J_{-n-1/2}(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x^{1/2}}\frac{d^{n}}{dx^{n}}\cos x \tag{2.4.12}$$

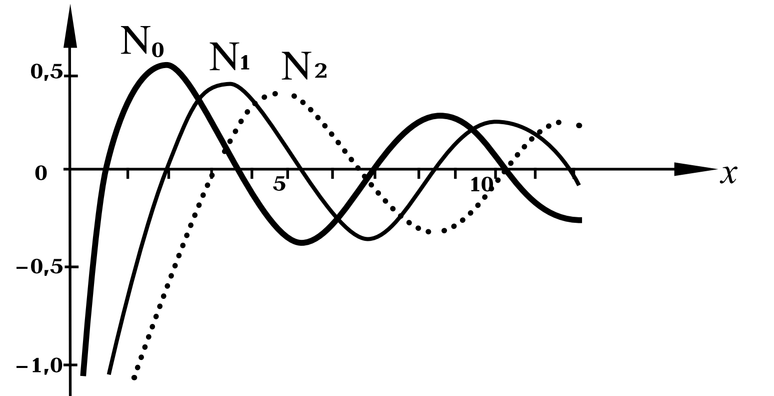
Звідси витікає, що асимптотична поведінка необмеженої в нулі функції Беселя з негативним напівцілим індексом повністю співпадає з асимптотичною поведінкою другого частинного лінійно-незалежного розв'язку — обмеженій в нулі функції Беселя з позитивним індексом.

Функції Беселя далеко від нуля близькі до тригонометричних функцій, але їх значення при наближенні змінної до безкінечності поступово затухають (наближаються до нуля). Тому загальний розв'язок рівняння Беселя на безкінечності обмежений і є поступово затухаючою на функцією, що наближаються до нуля.

Завдяки такій поведінці функції Беселя іноді розглядаються як поповнення і розширення класу тригонометричних коливальних функцій в прикладних завданнях математичної фізики. Розкладення за функціями Беселя та їх пряме застосування на сьогодні є одним з найбільш перспективних напрямів при вирішенні реальних фізичних задач і побудові достовірних математичних моделей реальних фізичних процесів.



Мал. 1. Обмежені в нулі функції Беселя



Мал. 2. Необмежені в нулі функції Неймана

§ 5. Розкладення в степеневі ряди функцій Беселя з довільним індексом

У рівнянні (2.1.5), до якого приводиться рівняння Беселя, всі похідні та ступені змінної, що входять до нього, парні, тому для функцій Беселя з урахуванням заміни (2.1.6) використовуються парні ступені розкладення.

$$x^2 z''(x) + xz'(x) + (x^2 - \nu^2) z(x) = 0 \qquad (2.1.1)$$

Відшукаємо розв'язок класичного рівняння Беселя (2.1.1) шляхом розкладення в степеневій ряд методом невизначених коефіцієнтів, вважаючи, що це розкладення існує і отриманий ряд сходиться.

$$z(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{p+2k} \qquad (2.5.1)$$

Підставимо розкладення (2.5.1) в рівняння (2.1.1):

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} (p+2k)(p+2k-1) a_k x^{p+2k} + \\ + (p+2k) a_k x^{p+2k} - \nu^2 a_k x^{p+2k} + a_k x^{p+2k+2}$$

Для забезпечення тотожної рівності при всіх значеннях зміною прирівняємо коефіцієнти для кожного із ступенів змінної:

$$\begin{array}{c|l} k=0 & (p+2k)(p+2k-1) + (p+2k) - \nu^2 = 0 \\ k & \big((p+2k)(p+2k-1) + (p+2k) - \nu^2\big) a_k + \\ & \quad + a_{k-1} = 0 \end{array}$$

Після спрощення отримуємо відношення:

$$p^2 = \nu^2 \quad \text{и} \quad p = \mp\nu \quad \text{при} \quad \nu \geqslant 0 \qquad (2.5.2)$$

$$4k(\mp\nu + k) a_k + a_{k-1} = 0 \quad \text{та} \quad a_0 \text{ довільне}$$

Звідси отримуємо вираз:

$$a_k = (-1)\,\frac{a_{k-1}}{4k(\mp\nu + k)} = \ldots$$

$$a_k = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k}k!\,(\mp\nu + k)\ldots(\mp\nu + 1)} \qquad (2.5.3)$$

Детальніше вивчимо вираз:

$$\gamma(k,\nu) = (\mp\nu + k)\ldots(\mp\nu + 1) \qquad (2.5.4)$$

При цілих позитивних значеннях параметра $\mp\nu$ (окремий випадок) вираз прийме звичний вигляд:

$$\gamma(k,n) = (n+k)\ldots(n+1) = (n+k)/n!$$

Для отримання компактного виду виразу (2.5.4) з натуральними параметрами є поняття функціонала. Для решти чисел Ейлером було спеціально введено поняття узагальненого функціонала — гамма-функції Ейлера або інтеграла Ейлера II роду, що має такі властивості:

$$\Gamma(u+1) = u\Gamma(u) \quad \text{де } u \text{ — числа} \qquad (1.3.3)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{и} \quad \Gamma(1) = 1 \qquad (1.3.4)$$

Це дозволяє компактно записати:

$$\gamma(k,\nu) = \Gamma(\mp\nu + k + 1)/\Gamma(\mp\nu + 1) \qquad (2.5.5)$$

$$\frac{a_k}{a_0} = (-1)^k \frac{\Gamma(\mp\nu + 1)}{2^{2k}k!\,\Gamma(\mp\nu + k + 1)} \qquad (2.5.6)$$

З міркувань зручності найчастіше використовують наступні прийняті значення:

$$a_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu} \frac{1}{\Gamma(\mp\nu + 1)} \quad \text{при } k = 0$$

$$a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu} \frac{(-1)^k}{2^{2k}k!\,\Gamma(\mp\nu + k + 1)} \qquad (2.5.6)$$

Загальний вид нульового параметра вибраний так, що при нульовому значенні (2.5.6) теж виконується.

Ми отримали класичне розкладення в ряд функцій Беселя з використанням гамма-функцій Ейлера:

$$z_{\mp\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\mp\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(\mp\nu + k + 1)} \qquad (2.5.7)$$

Дослідимо отриманий ряд докладніше. Розглянемо випадок цілих індексів. При позитивних цілих значеннях індексу гамма-функція є функціоналом.

При негативних цілих значеннях індексу гамма-функція вироджується в безкінечність, тому отримане розкладення в ряд (2.5.7) не має сенсу.

Твердження 2. *При цілих значеннях індексу розв'язок рівняння Беселя єдиний (з точністю до константи) і може бути отриманий розкладенням в ряд*

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k!\,(n+k)!} \quad \text{при } n \geqslant 0 \qquad (2.5.8)$$

Доказ. Для строгого доказу скористаємося отриманими раніше рекурентними відношеннями функцій Беселя. Перепишемо перше відношення (2.1.12) для функцій з цілим позитивним індексом:

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_n'(x) \qquad \text{при } n \geqslant 0$$

Друге рекурентне відношення (2.1.13) запишемо для функцій з цілим негативним індексом:

$$J_{-n-1}(x) = \frac{-n}{x} J_{-n}(x) + J_{-n}'(x) \qquad \text{при } n \geqslant 0$$

Підставивши в обидва ці відношення нульове значення індексу, отримаємо необхідну тотожність:

$$J_1(x) = -J_0'(x) \quad \text{и} \quad J_{-1}(x) = J_0'(x)$$

Звідси $J_1(x) = -J_{-1}(x)$ ці два розв'язки виявилися лінійно-залежними. ***Твердження доведене.***

Твердження 3. *При нецілих значеннях індексу існують два частинні лінійно-незалежні розв'язки рівняння Беселя (з точністю до константи), які можуть бути отримані розкладенням в ряд*

$$J_{\mp\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\mp\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(\mp\nu+k+1)} \quad \nu \geqslant 0 \qquad (2.5.9)$$

Доказ. Для доказу цього твердження скористаємося отриманими раніше рекурентними відношеннями. Представимо індекс у вигляді

$\nu = n + \varepsilon$ де $0 < \varepsilon < 1$ та n ціле ненегативне.

Найменше значення позитивного індексу ε

$$J_{\varepsilon+1}(x) = \frac{\varepsilon}{x} J_{\varepsilon}(x) - J'_{\varepsilon}(x) \qquad \text{де } 0 < \varepsilon < 1$$

$$J_{\varepsilon-1}(x) = \frac{\varepsilon}{x} J_{\varepsilon}(x) + J'_{\varepsilon}(x)$$

Сумнівний випадок напівцілих індексів досліджений раніше. Для напівцілих індексів існують два лінійно-незалежні розв'язки рівняння Беселя, які пов'язані з лінійною незалежністю двох тригонометричних функцій, — лінійно-незалежні розв'язки початкового рівняння Штурма-Ліувіля.

Лінійна незалежність двох різних розв'язків для інших нецілих індексів виходить з приведених рекурентних відношень, і отриманого розкладення в ряд.

$$\Gamma(\nu+k+1) = (k+1+\nu)\ldots(k+1-\nu)\Gamma(-\nu+k+1)$$

При нецілих значеннях параметра існує два лінійно-незалежні розв'язки рівняння Беселя. При негативних нецілих значеннях індексу функції Беселя, отримані методом розкладення в ряд, мають в нулі особливість і наближаються до безкінечності. При позитивних нецілих значеннях індексу функції Беселя рівні нулю, а обмежена функція з нульовим індексом має граничне значення в нулі, що дорівнює одиниці.

Функція Беселя є аналітичною при всіх значеннях змінної, виключаючи можливо нуль.

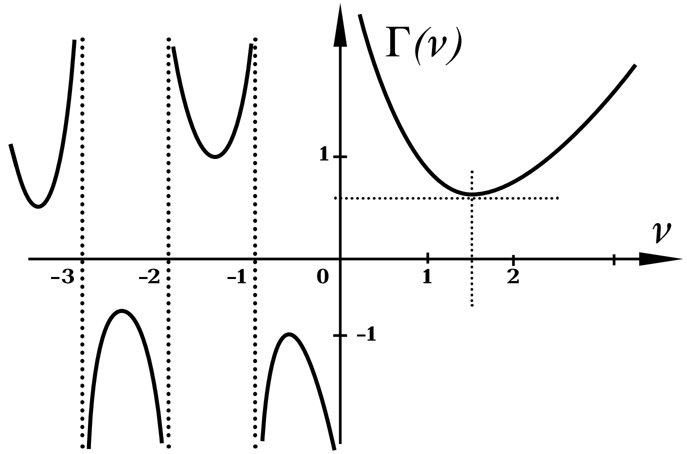
Збіжність отриманого ряду (2.5.9) забезпечується ознакою Вейерштраса в будь-якій замкнутій області при будь-якому обмеженому значенні нецілого індексу, оскільки при всіх значеннях k всі члени цього ряду обмежені деякою константою.

При цілих негативних значеннях індексу розв'язок рівняння єдиний і співпадає з позитивним.

При ненегативних індексах максимальне значення модуля числових коефіцієнтів ряду досягається при $k=0$ та $\nu=0$ і дорівнює 1.

$$\frac{2^{2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} > \frac{2^{2(k+1)}}{(k+1)!\,\Gamma(\nu+k+2)}$$

$$a_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \quad \text{обмежено при } \nu \geqslant 0$$



Мал. 3. Гамма-функція Ейлера

При всіх інших допустимих значеннях числові коефіцієнти ряду менше нульового та з поступовим зростанням значень k на безкінечності наближаються до нуля. Тому ряди (2.5.9) для функцій Беселя з ненегативним індексом не представляють ускладнень.

Швидке наближення до нуля коефіцієнтів розкладення ряду (2.5.9) для функцій Беселя з ненегативними індексами дозволяє використовувати обмежену кількість членів ряду для незначно віддалених від нуля рішень, де ряд (2.5.9) достатньо швидко сходиться. Із зростанням індексу функцій Беселя швидкість наближення до нуля його коефіцієнтів також зростає.

Для функцій Беселя з нецілим негативним індексом в близькій околі цілих негативних значень індексу значення відповідних гамма-функцій у перших числових коефіцієнтах ряду (2.5.9) необмежено зростають і ν початкових числових коефіцієнтів ряду будуть малі. Причому чим більше значення індексу ν, тим більше початкових коефіцієнтів ряду будуть малими.

$$\lim_{\nu\to n}\left|\Gamma(-\nu)\right| = \infty \quad \text{для } \nu \geqslant 0 \text{ та } n \text{ натуральні.}$$

Тому недалеко від нуля для функцій Беселя з негативним індексом, близьким до цілого, при використанні чисельних методів і наближених обчислень на комп'ютері початковими членами розкладення можна знехтувати. Істотними для наближених обчислень можуть виявитись члени ряду з номерами, близькими до ν. Ігнорування цього факту іноді може спричинити незбіжність або некоректність немодифікованого алгоритму.

При будь-якому обмеженому негативному нецілому значенні індексу за рахунок невироджуваності гамма-функцій Ейлера ряд (2.5.9) також сходитиметься. Проблеми чисельних наближених обчислень розкладення ряду можуть виникнути поблизу екстремумів гамма-функцій негативного параметра, які із зростанням ν швидко наближаються до нуля, досягаючи його на безкінечності.

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|\mathrm{ext}\ \Gamma(-\nu)\right| = 0 \quad \text{для } \nu \geqslant 0$$

Проте із загальної теорії гамма-функцій Ейлера відомо, що вони досягають екстремуму поблизу напівцілих значень параметра. Розкладення для них отримане явно.

Розкладення в ряд (2.5.9) практично не використовується при значно віддалених від нуля значеннях змінних, де функції Беселя виявляють чітку асимптотичну поведінку, яку не можна довести, явно виходячи із загального виду отриманого розкладення. ***Твердження доведене.***

Розглянемо детальніше поведінку отриманих розкладень в ряд (2.5.9) для функцій Беселя за умови, що значення індекс негативний і наближається до цілого числа (функції Беселя цілого негативного індексу):

$$J_{-n}(x) = \lim_{\nu\to n}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(-\nu+k+1)} \qquad \nu \geqslant 0$$

Гамма-функції Ейлера мають неусувні особливості та наближаються до безкінечності при наближенні їх параметра до цілого негативного числа або нуля. Тому при будь-яких обмежених значеннях змінної (не розглядаючи асимптотичну поведінку ряду на безкінечності) перші $(n-1)$ членів цього ряду наближаються до нуля:

$$\lim_{\nu\to n}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(-\nu+k+1)} = 0$$

Тому граничний перехід дасть такий результат:

$$J_{-n}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(-n+k+1)}$$

Провівши заміну $m=n+k$, де $m=0\ldots\infty$, отримаємо:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \tag{2.5.11}$$

Ми ще раз показали, що при цілих негативних значеннях індексу пряме розкладення в ряд дає тільки одне незалежне розв'язок рівняння Беселя, але в найближчій околі нульового й кожного негативного цілого значення індексу існують два лінійно-незалежні розв'язки, які не співпадають, але при наближенні значення індексу до цілого числа або нуля вони наближаються один до одного з точністю до константи:

$$\lim_{\nu\to n} J_{-\nu}(x) = (-1)^n \lim_{\nu\to n} J_\nu(x) \tag{2.5.12}$$

Це важлива властність буде використана для отримання функцій Неймана — другого лінійно-незалежного розв'язку рівняння Беселя при всіх значеннях індексу.

§ 6. Циліндрові функції Неймана

У твердженні 2 було доведено, що при нецілому індексі рівняння Беселя має два лінійно-незалежні розв'язки, які можна представити у вигляді розкладення в ряд (2.5.9). Проте в ході міркувань виявилися деякі особливості функцій Беселя з негативним індексом, незручні в практичному застосуванні (наприклад, при реалізації чисельних методів і наближених обчисленнях на комп'ютері). Тому практичне застосування в чистому виді функції Беселя з нецілим негативним параметром знаходять достатньо рідко.

Для функцій Беселя з напівцілим індексом (зокрема негативним), які розглядалися окремо, були знайдені явні кінцеві ряди, що представляють елементарні функції (степеневі та тригонометричні), і отримані рекурентні відношення для обчислень всіх необхідних числових коефіцієнтів цих рядів.

Для практичних потреб рідко використовуються функції Беселя з великими індексами, тому пряме обчислення цих функцій за обмеженим рядом елементарних функцій виконується без ускладнень. Завдяки цим особливостям функції Беселя і Неймана з напівцілим індексом часто виділяють в окремий клас.

Для того, щоб згладити деякі негативні особливості розкладення в ряд функцій Беселя з нецілим негативним індексом, Вебером була введена функція, що є сумою двох лінійно-незалежних розв'язків рівняння Беселя і в літературі названа функцією Неймана:

$$\mathcal{N}_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \text{ для } \nu \geqslant 0 \qquad (2.6.1)$$

Функції Неймана також прийнято називати циліндровими функціями другого роду індексу ν. За рахунок введення у формулу тригонометричних функцій при цілих значеннях індексу функції Неймана існують і є лінійно-незалежними до функцій Беселя першого роду.

Для знаходження граничного значення при цілих індексах скористаємося тим, що при нецілих індексах два лінійно-незалежні розв'язки існують і вони такі, що є диференцюємими. Розкриємо невизначеність, продиференціювавши праву частину за правилом Лопіталя:

$$\mathcal{N}_n(x) = \lim_{\nu\to n} \frac{\frac{\partial}{\partial\nu}\left(J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)\right)}{\frac{\partial}{\partial\nu}\sin\nu\pi} \qquad (2.6.2)$$

Нам достатньо отримати значення функції (2.6.2) для окремого випадку — нульового індексу, після чого застосувати знайдені раніше рекурентні відношення для розв'язків рівняння Беселя. Якщо цей другий незалежний розв'язок існує, інші лінійно-незалежні розв'язки можуть бути отримані на підставі рекурентних відношень.

Відзначимо, що рекурентні відношення для розв'язків рівняння Беселя з довільним індексом були отримані без використання традиційних розкладень в ряд тільки на підставі загального виду класичного рівняння Беселя, тому використання методу математичної індукції для ненульових цілих індексів функцій Неймана коректно.

$$\mathcal{N}_0(x) = \lim_{\nu\to 0} \frac{\frac{\partial}{\partial\nu}\left(J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)\right)}{\frac{\partial}{\partial\nu}\sin\nu\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu}\Big|_{\nu=0}$$

Продиференціюємо розкладення в ряд (2.5.9) почленно по параметру ν, використовуючи властивості гамма-функцій Ейлера, і спрямувавши параметр ν до нуля, отримаємо розкладення

$$\mathcal{N}_0(x) = \frac{2}{\pi}J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) - \qquad (2.6.3)$$

$$- \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}\right)$$

де C — постійна константа Ейлера, наближене значення якої складає 0,5772157...

Використовуються наступні відношення для гамма-функцій Ейлера, що приводяться без доказу:

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right) \cong 0{,}5772157\ldots$$

$$\left.\frac{\Gamma(u)}{\Gamma'(u)}\right|_{u=0} = -C \quad \text{де } k \text{ — цілі числа}$$

$$\left.\frac{\Gamma(u)}{\Gamma'(u)}\right|_{u=k} = -C + \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k-1}\right) \qquad (2.6.4)$$

Значення функцій Неймана для ненульового цілого індексу знаходиться за правилом Лопіталя з (2.6.2):

$$\mathcal{N}_n(x) = \lim_{\nu\to n}\mathcal{N}_\nu(x) = \lim_{\nu\to n}\frac{1}{\pi\cos\nu\pi}\Big(-\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu} - \pi J_\nu(x)\sin\nu\pi + \pi\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu}\cos\nu\pi\Big)$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{\nu\to n}\Big(\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu} - (-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\Big) \qquad (2.6.5)$$

Функції Неймана для цілого індексу в загальному випадку мають вигляд:

$$\mathcal{N}_n(x) = \frac{2}{\pi}J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2}+C\right) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{n+2k}}{k!(k+n)!}\Big(\sum_{m=1}^{n+k}\frac{1}{m}+\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\Big) \qquad (2.6.6)$$

Для напівцілого значення індексу функцій Неймана отримаємо явний вираз через елементарні функції (степеневі та тригонометричні). Розглянемо одночасно лінійну комбінацію пари лінійно-незалежних розв'язків рівняння з половинним індексом:

$$\mathcal{N}^{*}_{1/2}(x) = \frac{\sin x\ \cos 0{,}5\pi - \cos x}{\sin 0{,}5\pi} \qquad (2.6.7)$$

Використовуючи формальний диференціальний оператор (2.3.1) й леми 2 і 3 про зворотній оператор, з точністю до негативної константи в ступені отримаємо загальний вид функцій Неймана напівцілого індексу:

$$\mathcal{N}_{n+1/2}(x) = (-1)^n x^{n+1/2}\,\mathcal{D}^n\,\frac{\mathcal{N}^{*}_{1/2}(x)}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \qquad (2.6.8)$$

Функції Неймана, які іноді також називають функціями Вебера по прізвищу математика, що запропонував їх використання, пов'язують один з одним ті ж самі рекурентні відношення, що і класичні функції Беселя. Функції Неймана і Беселя з однаковими індексами лінійно-незалежні та утворюють фундаментальну систему розв'язків класичного рівняння Беселя, зокрема для цілих і напівцілих значень індексу.

Функції Неймана мають в нулі неусувну особливість, стрімко наближаючись до безкінечності. Завдяки цьому розкладення за функціями Неймана використовується при описі процесів, які є «неідеальними». Спочатку досліджується варіант розкладення за функціями Беселя для «хорошого» завдання, потім використовується додаткова умова і вирішується завдання з функціями Неймана.

Наприклад, в завданні з коливаннями тонкої круглої мембрани використовується розкладення за функціями Беселя, якщо мембрана цілісна («гарна мембрана»), і додається розкладення за функціми Неймана, якщо в мембрані є круглий отвір («мембрана з дефектом»).

Розповсюдження хвиль по поверхні круглого озера може бути описане за допомогою функцій Беселя. Але якщо в озері знаходиться острів, який спотворюватиме ідеальну картину розповсюдження хвиль, до розв'язку обов'язково додається використання функцій Неймана.

У завданні на вигин довгого цілісного круглого циліндра використовуються функції Беселя, але в завданні на вигин полого усередині циліндра (труба з круглим перетином отвору) обов'язково додаються функції Неймана, і саме вони забезпечують коректний опис парадоксальної стійкості до вигину полого циліндра в порівнянні з цілісним.

Це ж саме відноситься й до коректного опису неопуклих об'єктів — таврових і двотаврових балок в порівнянні із звичайними балками, прямокутними в перетині.

Саме функції Неймана дозволяють коректно описати стійкість балок складної форми, порожнистих труб і тонких листів, сформованих у формі гармошки, до вигину й підвищених навантажень, при яких плоскі листи і прямокутні балки вже сильно прогинаються.

Функції Неймана дозволяють коректно описувати процес поблизу деякої особливості для того або іншого завдання, яке моделює неідеальний фізичний процес.

Наприклад, розглянемо якийсь самотній острів, що стоїть посеред моря, по якому вільно розповсюджуються хвилі. Далеко від острова хвилі поводяться ідеально, строго підкоряючись хвильовому рівнянню. Проте вже в близький околі острова виникають характерні особливості розповсюдження хвиль, які на віддаленні від острова достатньо швидко згладжуються і стають непомітними. Це наочно показує характер поведінки функцій Неймана поблизу особливості.

Таким чином, функції Неймана грають величезну роль в точному математичному моделюванні «неідеальних процесів з дефектами» в околі особливості. Ігнорування додаткового розкладення за функціми Неймана при описі фізичних процесів з особливостями приводить до створення некоректної математичної моделі та появи неусувних математичних псевдопарадоксів.

Якщо процес побудови алгоритмів обчислювальних процесів для функцій Беселя універсальний і забезпечує хорошу збіжність майже в усіх випадках, то перед побудовою моделі наближених обчислень для функцій Неймана необхідно додатково аналітично вивчити їх поведінку, і лише після цього використовувати той або інший алгоритм. Інакше дуже висока вірогідність неправильних обчислень і незбіжності алгоритмів з реаліями.

§ 7. Інші циліндрові функції

Будь-яка лінійна комбінація частинних розв'язків класичного рівняння Беселя — функцій Беселя (ненегативного індексу) і функцій Неймана — також є загальним розв'язком рівняння Беселя. Існує представлення функції експоненти від чисто уявного аргументу через періодичні тригонометричні функції:

$$\exp ix = \cos x + i \sin x \quad \text{де} \quad i^2 = -1 \tag{2.7.1}$$

$$\exp ix = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{ix}{k!}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Якщо побудувати аналогічні залежності між фундаментальними розв'язками рівняння Беселя, можна отримати достатньо цікавий клас функцій. Циліндровими функціями третього роду або функціями Ганкеля називають наступні функції:

$$\mathcal{H}_\nu(x) = J_\nu(x) \pm i \mathcal{N}_\nu(x) \quad \text{де} \quad i^2 = -1 \tag{2.7.2}$$

Використовуючи представлення функцій Неймана (2.6.1) через функції Беселя, ми можемо записати:

$$\mathcal{H}_\nu(x) = \frac{J_{-\nu}(x) - J_\nu(x) \exp \mp i\pi\nu}{\pm i \sin \pi\nu} \tag{2.7.3}$$

При дійсних змінних ці функції мають комплексні значення. Формули справедливі й при цілих індексах, які отримуються шляхом граничного переходу.

У завданні про отримання розв'язок хвильового рівняння функції Беселя дійсного аргументу є образом стоячої хвилі. Функції Ганкеля дозволяють дати образ хвилі, що розповсюджується. Тому функції Ганкеля грають велику роль у фізичних процесах, особливо при вивченні хвильових процесів в необмежених областях. Функції Ганкеля використовуються не тільки в практичних завданнях, але і в деяких аспектах теорії функцій Беселя.

Замінимо в рівнянні Беселя і розкладенні в ряд функцій Беселя дійсну змінну x на чисто уявну змінну ix і запишемо:

$$x^2 z''(x) + xz'(x) - (x^2 + \nu^2) z(x) = 0 \qquad (2.7.2)$$

$$J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(ix/2)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$$

Функція Беселя чисто уявного аргументу має певну незручність — при парному індексі вона є дійсною функцією, а при непарному є чисто уявною функцією. Щоб позбавитися від цієї незручності та отримати дійсну функцію при будь-яких значеннях індексу, вводять модифіковану функцію Беселя:

$$\mathcal{I}_\nu(x) = J_\nu(ix) \exp(i\pi\nu/2) \qquad (2.7.3)$$

$$\mathcal{I}_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \qquad (2.7.4)$$

За другий частинний лінійно-незалежний розв'язок рівняння (2.7.2), що називається модифікованим рівнянням Беселя, зазвичай приймають функцію функцією Макдональда, яка є дійсною при будь-якому дійсному значенні індексу:

$$\mathcal{K}_\nu(x) = \frac{i\pi \exp(i\pi\nu/2)}{2} \mathcal{H}_\nu(x) \qquad (2.7.5)$$

Очевидно, що функція Макдональда нецілого індексу також є лінійною комбінацією двох лінійно-незалежних розв'язків рівняння Беселя — функцій Беселя позитивного і негативного індексу:

$$\mathcal{K}_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{J_{-\nu}(x) - J_\nu(x)}{\sin \pi\nu} \qquad (2.7.6)$$

Доказ існування функції Макдональда цілого індексу проводиться аналогічно доказу існування функцій Неймана цілого індексу — диференціюванням за правилом Лопіталя.

$$\mathcal{K}_n(x) = \lim_{\nu\to n} \mathcal{K}_\nu(x) = \lim_{\nu\to n} \frac{\frac{\partial}{\partial\nu}\left(J_{-\nu}(x) - J_\nu(x)\right)}{\frac{\partial}{\partial\nu}\sin\nu\pi} \frac{\pi}{2}$$

$$\mathcal{K}_n(x) = \frac{1}{2} (-1)^n \lim_{\nu\to n}\left(\frac{\partial}{\partial\nu} J_{-\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(x)\right)$$

Через розкладення в ряд з подальшим диференціюванням за параметром ν можна показати, що ця функція існує. У разі цілого індексу функції Макдональда приймуть вигляд:

$$\mathcal{K}_n(x) = (-1)^{n+1} \mathcal{I}_n(x)\left(\ln\frac{2}{\pi} - C\right) + \qquad (2.7.7)$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} +$$

$$+ (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(k+n)!}\left(\sum_{m=1}^{n+k}\frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\right)$$

Модифікована функція Беселя і функція Макдональда утворюють загальний розв'язок модифікованого рівняння Беселя:

$$x^2 z''(x) + xz'(x) - (x^2 + \nu^2) z(x) = 0 \qquad (2.7.2)$$

$$z(x) = c_1 \mathcal{I}_\nu(x) + c_2 \mathcal{K}_\nu(x) \qquad (2.7.8)$$

Ми детально не досліджуємо розв'язок модифікованого рівняння Беселя. Можна відзначити, що при позитивному значенні індексу графіки цих функцій нагадують гіперболу

$$z(x)\,x \cong \text{const}$$

і при фіксованому значенні змінної ростуть разом із значенням індексу. Модифіковані функції Беселя монотонно ростуть із зростанням змінної. Функції Макдональда мають в нулі неусувну особливість і монотонно убувають із зростанням змінної, наближаючись до нуля на безкінечності. Ці функції актуальні в електродинаміці.

§ 8. Поведінка циліндрових функцій в околі нуля

Розглянемо поведінку циліндрових функцій в околі нуля — при достатньо малих значеннях змінної. Про поведінку цих функцій ми можемо судити, досліджуючи поведінку безкінечних рядів (2.5.8), (2.5.9) і (2.6.6) в околі початку координат. Оскільки члени цих рядів убувають достатньо швидко, поведінку функцій можна визначити по декількох перших членах розкладення ряду. Розглянемо різні типи циліндрових функцій.

Обмежені функції Беселя з нульовим індексом. Розглядаючи розкладення (2.5.8) в околі нуля, ми можемо припустити, що нехтуючи членами, які швидко убувають,

$$J_0(x) \approx 1 - x^2/4 + \ldots \quad \text{и} \quad J_0(0) = 1 \tag{2.8.1}$$

Функція Беселя з нульовим індексом в нулі рівна одиниці та убуває поблизу початку координат.

Обмежені функції Беселя з ненульовим індексом. Розглянемо розкладення в ряд при будь-яких ненульових позитивних значеннях індексу:

$$J_\nu(x) \approx \frac{x^\nu}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)} \quad \text{для} \quad \nu > 0 \;\text{ і }\; J_\nu(0) = 0 \tag{2.8.2}$$

Функція Беселя з ненульовим індексом в нулі рівна нулю і зростає поблизу початку координат.

Необмежені в нулі функції Беселя з нецілим індексом. Розглянемо розкладення в ряд при будь-яких нецілих негативних значеннях індексу:

$$J_{-\nu}(x) \approx \frac{2^\nu}{x^\nu\,\Gamma(-\nu+1)} \quad \text{для} \quad \nu > 0 \tag{2.8.3}$$

$\lim\limits_{x\to+0} J_{-\nu}(x) = +\infty$ — неусувна особливість.

При наближенні до нуля справа (з боку позитивних значень змінної) функція Беселя убуває. При наближенні до нуля функція Беселя з нецілим негативним індексом наближається до безкінечності та має неусувний розрив.

Необмежені в нулі функції Неймана. Всі функції Неймана в нулі мають неусувний розрив і наближаються до безкінечності. У разі нецілого індексу використовується представлення функції Неймана через функції Беселя позитивного і негативного індексу (2.6.1) і особливості поведінки функцій Беселя, що входять до формули:

$$\lim_{x\to+0} \mathcal{N}_\nu(x) = -\infty \quad \text{для} \quad \nu \neq n \tag{2.8.4}$$

При цілих позитивних значеннях індексу використовуються початкові члени розкладення ряду (2.6.6):

$$\mathcal{N}_n(x) \approx \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}(n-1)!\left(\frac{2}{x}\right)^n \tag{2.8.5}$$

Наближення до безкінечності обумовлене наявністю логарифмічного і степеневого члена розкладення ряду.

При вирішенні практичних задач з використанням функцій Беселя і Неймана зазвичай розглядають тільки позитивні значення змінної — пошук розв'язків задач проводиться на позитивній піввісі.

Практичне використання функцій Беселя ненегативного індексу і розкладення в ряд у достатньо малому околі нуля дозволяє отримувати дуже хороші кінцеві послідовності, що швидко сходяться й складаються з малого числа членів ряду.

Практичне використання функцій Неймана в малих околі нуля і розкладення в ряд має певні особливості.

Для того, щоб коректно використовувати чисельні методи і комп'ютерні алгоритми, необхідно виключати з розгляду дуже малі околи нульового значення змінної функцій Неймана — тобто околи, в яких функції Неймана мають виражену неусувну особливість, приймає надто великі значення і наближаються до безкінечності. Поведінка функцій Неймана і математичної моделі в цілому в цій «критичній» околі вивчається окремо.

§ 9. Корені розв'язків рівняння Беселя

Для того, щоб зрозуміти, які корені мають рішення рівняння Беселя, необхідно розглянути поведінку функцій Беселя далеко від початку координат. Розглянемо рівняння, до якого приводиться рівняння Беселя:

$$y_\nu''(x) - \frac{(\nu - 1/2)(\nu + 1/2)}{x^2} y_\nu(x) = -y_\nu(x) \qquad (2.1.5)$$

$$J_\nu(x) = y_\nu(x)/\sqrt{x} \quad \text{для всіх } \nu \qquad (2.1.6)$$

Це пов'язано з тим, що при будь-якому обмеженому значенні індексу функцій Беселя потенціал відповідного йому рівняння Штурма-Ліувіля наближається до нуля:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\nu - 1/2)(\nu + 1/2)}{x^2} = 0 \quad \text{для всіх } \nu \qquad (2.9.1)$$

Тому є підстави вважати, що й корені рівняння Беселя при віддалених від нуля значеннях змінної наближатимуться до коренів хвильового диференціального рівняння при всіх обмежених значеннях індексу:

$$y''(x) + y(x) = 0 \qquad \text{для всіх } \nu \qquad (2.9.2)$$

При достатньо віддалених від нуля значеннях змінної розв'язок рівняння (2.1.5) наближається до лінійної комбінації двох лінійно-незалежних тригонометричних коливальних функцій:

$$y(x) \cong c_1 \sin x + c_2 \cos x \quad \text{при } x \to +\infty \qquad (2.9.3)$$

Якщо розглядати два лінійно-незалежні частинні розв'язки хвильового рівняння, яким відповідають дві лінійно-незалежні функції Беселя з позитивним та негативним індексом (або функції Беселя та Неймана), можна припустити, що корені функцій Беселя існують та при зростанні змінної наближаються до постійного інтервалу π. Дослідження коренів функцій Беселя історично пов'язані з розв'язком практичних задач.

Твердження 4. *Все корені розв'язків рівняння Беселя, окрім можливо нуля, є простими.*

Доказ. Розглянемо деяку циліндрову функцію $z(x)$, яка має корені при відмінних від нуля значеннях змінної:

$$x^2 z''(x) + x z'(x) + (x^2 - \nu^2) z(x) = 0 \qquad (2.1.1)$$

Якщо припустити, що існує хоча б один корінь розв'язків цього рівняння, який не є простим і має порядок вище за одиницю, це означає, що й перша похідна цієї функції рівна нулю:

$$z(x_0) = 0 \quad \text{та} \quad z'(x_0) = 0 \quad \text{при } x_0 \neq 0$$

Підставивши ці значення в рівняння Беселя, отримаємо вимогу тотожної рівності нулю другої похідної даної функції.

$$z''(x_0) = 0 \qquad \text{при } x_0 \neq 0$$

Продиференціюємо рівняння Беселя і підставимо туди отримані значення кореня функції, першої та другої похідних. Ми отримаємо вимогу рівності нулю третьої похідної при ненульових значеннях змінної.

Продовжуючи використання методу математичної індукції, аналогічно доводиться тотожна рівність нулю всіх старших похідних. Звідси витікає, що функція тотожно стає нулем при всіх значеннях змінної. Це неможливо, оскільки раніше ми довели існування невироджених розв'язків рівняння.

Тому розв'язок рівняння Беселя поза нулем може мати тільки прості корені. ***Твердження доведене.***

Якщо функції Беселя з позитивним індексом мають корінь в нулі, то його порядок співпадає з індексом функції Беселя. Це безпосередньо витікає з загального виду розкладення ряду.

При значенні індексу більше -1 функції Беселя не мають чисто уявних і комплексний коренів. Це витікає з властивостей функцій і пов'язаних інтегралів, в які трансформуються функції Беселя при заміні дійсного змінного на чисто уявний (модифіковані функції Беселя та функції Макдональда, що монотонно зростають або убувають на позитивній піввісі).

Твердження 5. *Корені послідовних розв'язків рівняння Беселя перемежається один з одним:*

$$z_\nu(x_1) = z_{\nu+1}(x_2) = z_\nu(x_3) = z_{\nu+1}(x_4) = \ldots = 0$$

$$\text{де} \quad 0 \leqslant x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \ldots \quad \text{для } \nu \geqslant 0 \qquad (2.9.4)$$

Доказ. Скористаємося рекурентними відношеннями для розв'язків рівняння Беселя. Продиференціюємо розв'язок рівняння Беселя, помножений на деяку степеневу функцію:

$$\frac{d}{dx}\left(x^\omega z_\nu(x)\right) = \omega\, x^{\omega-1} z_\nu(x) + x^\omega z'_\nu(x) \qquad (2.9.5)$$

$$z_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x}\, z_\nu(x) - z'_\nu(x) \quad \text{для всіх } \nu$$

Тому ми можемо записати вираз (2.9.5)

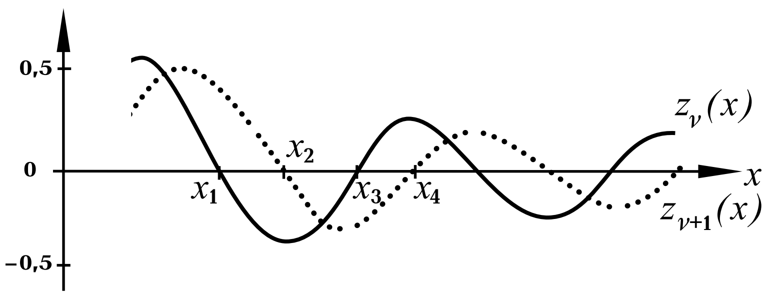
$$\frac{d}{dx}\left(x^\omega z_\nu(x)\right) = \omega\, x^{\omega-1} z_\nu(x) + $$
$$+ x^\omega\left(\frac{\nu}{x}\, z_\nu(x) - z_{\nu+1}(x)\right)$$

Якщо покласти введене значення параметра ω, який дорівнює $\omega = -\nu$ значення індексу розв'язок рівняння Беселя, тоді тотожність прийме наступний вигляд:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} z_\nu(x)\right) = -x^{-\nu} z_{\nu+1}(x) \qquad (2.9.6)$$

Розглянемо деякий розв'язок рівняння Беселя з індексом V і два його сусідніх корені:

$$z_\nu(x_1) = z_\nu(x_3) \quad \text{для } x_1 < x_3$$



Мал. 4. Переміжні корені розв'язків рівняння Беселя

Відповідно до теореми Ролля, між двома сусідніми коренями гладкої функції, такої, що диференціюється, помноженої на монотонну функцію, що не міняє знаку, повинен знаходитися хоч один максимум або мінімум, в якому перша похідна добутку стає нулем. Це означає, що існує така крапка θ, що

$$0 \leqslant x_1 < \theta < x_2 \quad \text{й} \quad \left(\theta^{-\nu} z_\nu(\theta)\right)' = 0 \qquad (2.9.7)$$

Підставивши це значення в отримане рівняння (2.9.6), яке виконується при всіх значеннях змінної, ми довели, що між двома коренямии розв'язку рівняння Беселя з індексом ν повинен знаходитися хоча б один корінь розв'язку рівняння з індексом $\nu+1$.

Для доказу того, що між двома коренямии розв'язок рівняння Беселя з індексом $\nu+1$ знаходиться хоча б один розв'язок рівняння Беселя з індексом ν, повторимо міркування, використовуючи друге рекурентне відношення між розв'язками рівняння Беселя:

$$z_\nu(x) = \frac{\nu}{x}\, z_{\nu+1}(x) + z'_{\nu+1}(x) \quad \text{для всіх } \nu$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^\omega z_{\nu+1}(x)\right) = \omega\, x^{\omega-1} z_{\nu+1}(x) + x^\omega z'_{\nu+1}(x) =$$
$$= \omega\, x^{\omega-1} z_{\nu+1}(x) + x^\omega\left(z_\nu(x) - \frac{\nu}{x}\, z_{\nu+1}(x)\right)$$

Якщо покласти введене значення параметра ω, що дорівнює $\omega = \nu$ значенню індексу розв'язок рівняння Беселя, тотожність прийме вигляд:

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu z_{\nu+1}(x)\right) = x^\nu z_\nu(x) \qquad (2.9.8)$$

Існування хоча б одного кореня доводиться аналогічними міркуваннями. Провівши міркування в обидві сторони для двох розв'язків рівняння Беселя, пов'язаних рекурентними відношеннями, ми довели не тільки існування переміжного один з одним кореня, але й те, що між двома сусідніми коренями одного розв'язку рівняння Беселя існує тільки один корінь пов'язаного з ним рекурентними відношеннями іншого розв'язку рівняння Беселя з індексом, відмінним на одиницю.

Утверждение доказано.

Для того, щоб довести наступне твердження, розглянемо визначник Вронського. Якщо існують два лінійно-незалежні розв'язки рівняння Беселя, то вони задовольняють наступному відношенню:

$$z_\nu(x) z'_{-\nu}(x) - z'_\nu(x) z_{-\nu}(x) = c/x \qquad (2.9.9)$$

де $c \neq 0$ — деяка константа.

Якщо ми підставимо в рівняння Беселя

$$x^2 z''(x) + x z'(x) - (x^2 + \nu^2) z(x) = 0 \qquad (2.7.2)$$

розв'язок цього рівняння з формальним позитивним індексом і помножимо на розв'язок з формальним негативним індексом, потім в це ж рівняння підставимо розв'язок з негативним індексом, помножений на розв'язок з позитивним індексом, а потім віднімемо перше отримане рівняння з другого, ми отримаємо:

$$z_\nu(x) \frac{d}{dx}\left(x z_{-\nu}(x)\right) - z_{-\nu}(x) \frac{d}{dx}\left(x z_\nu(x)\right) = 0$$

або $$\frac{d}{dx}\Big(x\big(z_\nu(x) z'_{-\nu}(x) - z'_\nu(x) z_{-\nu}(x)\big)\Big) = 0$$

Формально проінтегрувавши отриманий вираз, отримаємо тотожність (2.9.9), яку й потрібно було довести. Ліва частина тотожності називається визначником Вронського або вронскіаном рівняння Беселя:

$$\mathfrak{B}(z_\nu(x), z_{-\nu}(x)) = \begin{vmatrix} z_\nu(x) & z_{-\nu}(x) \\ z'_\nu(x) & z'_{-\nu}(x) \end{vmatrix} \qquad (2.9.10)$$

Якщо розв'язки рівняння Беселя лінійно-незалежні, то визначник Вронського для них невироджений. Якщо розв'язки рівняння лінійно-залежні, то визначник Вронського тотожно вироджується в нуль.

Для знаходження визначника Вронського для функцій Беселя скористаємося розкладенням цих функцій в ряд і отримаємо константу при деякому конкретному значенні змінної. Оскільки визначник Вронського має вигляд (2.9.9), помножимо обидві частини цієї рівності на x та покладемо нульове значення змінної (зручне при розгляді розкладення в ряд).

$$J_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\left(1 + O(x^2)\right) \qquad (2.9.11)$$

$$J'_\nu(x) = \frac{(x/2)^{\nu-1}}{2\Gamma(\nu)}\left(1 + O(x^2)\right)$$

де $\lim\limits_{x \to 0} |O(x^2)/x^2| < \infty$ — позначення.

Підставимо отримані значення в (2.9.9) і запишемо

$$J_\nu(x) J'_{-\nu}(x) - J'_\nu(x) J_{-\nu}(x) =$$

$$= \frac{1}{x} \frac{-2}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu)} + O(x)\Big|_{x \to 0}$$

Звідси набудемо значення константи c та визначника Вронського для двох лінійно-незалежних функцій Беселя, що представляють розв'язок рівняння Беселя:

$$J_\nu(x) J'_{-\nu}(x) - J'_\nu(x) J_{-\nu}(x) = -\frac{2 \sin \pi\nu}{x\pi} \qquad (2.9.12)$$

Аналогічним чином встановлюється відношення між другою парою лінійно-незалежних розв'язків рівняння Беселя — функції Беселя з ненегативним індексом і функції Неймана, що існують при всіх значеннях індексу (включаючи й цілі):

$$J_\nu(x) \mathcal{N}'_\nu(x) - J'_\nu(x) \mathcal{N}_\nu(x) = 2/(\pi x) \qquad (2.9.13)$$

Для вивчення поведінки коренів двох лінійно-незалежних розв'язків рівняння Беселя використовуємо отриманого узагальненого визначника Вронського (2.9.9), який в цьому випадку не вироджений.

Твердження 6. *Корені двох лінійно-незалежних розв'язків рівняння Беселя, що мають один і той же індекс, перемежається один з одним.*

$$z_\nu(x_1) = z_{-\nu}(x_2) = z_\nu(x_3) = z_{-\nu}(x_4) = \ldots = 0$$

$$\text{де} \quad 0 \leqslant x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \ldots \quad \text{для} \quad \nu \geqslant 0 \qquad (2.9.14)$$

Доказ. Розглянемо два послідовні корені одного з двох лінійно-незалежних розв'язків рівняння Беселя (для зручності розглянемо розв'язок з формально позитивним індексом)

$$z_\nu(x_1)=z_\nu(x_3)=0$$

Відповідно до доведеного раніше, розв'язки рівняння Беселя поза нулем мають тільки прості корені, а значить похідні на цих коренях не дорівнюють нулю:

$$z'_\nu(x_1)\neq 0 \quad \text{и} \quad z'_\nu(x_3)\neq 0$$

Між двома сусідніми коренями функція Беселя не міняє знак, вона або тільки позитивна, або тільки негативна. Аналітична функція між коренями має досяжний екстремум (максимум або мінімум), а похідна на цьому екстремумі досягає нульового значення і міняє свій знак на протилежний:

$$\operatorname{sign} z'_\nu(x_1) = (-1)\operatorname{sign} z'_\nu(x_3)$$

Визначник Вронського для першого і другого кореня розв'язку формально позитивного індексу буде:

$$-z'_\nu(x_1)z_{-\nu}(x_1) = c/x_1$$
$$-z'_\nu(x_3)z_{-\nu}(x_3) = c/x_3$$

Через те, що змінна x ненегативна, а похідна розв'язку рівняння Беселя з позитивним індексом на корені міняє знак, з отриманих відношень виходить, що другий незалежний розв'язок рівняння Беселя з негативним індексом також міняє знак:

$$\operatorname{sign} z_{-\nu}(x_1) = (-1)\operatorname{sign} z_{-\nu}(x_3)$$

Якщо аналітична безперервна функція, що диференціюється, міняє знак на деякому інтервалі, це означає, що вона має на ньому хоча б один корінь. Те, що між двома коренями розв'язку рівняння Беселя знаходиться тільки один корінь другого лінійно-незалежного розв'язку рівняння доводиться, застосувавши міркування для функції з формально негативним індексом. Таким чином, корені перемежаються і у двох лінійно-незалежних розв'язків одного рівняння, і у рішень рівняння, пов'язаних рекурентним відношенням, індекс яких відрізняється на одиницю.

Якщо корені двох лінійно-незалежних розв'язків рівняння поза нулем співпадуть, то визначник Вронського для рівняння Беселя не відповідатиме відношенню (2.9.9) і зрівняється з нулем. Тому корені двох лінійно-незалежних розв'язків рівняння Беселя з однаковим індексом не співпадають, а перемежаються один з одним.

Твердження доведене.

Для найменшого (найближчього до нуля) невиродженого кореня функції Беселя виконується відношення:

$$J_\nu(\xi)=0 \quad \text{для } \nu\geqslant 0 \text{ й } \xi>0 \tag{2.9.15}$$
$$\sqrt{\nu(\nu+2)} < \xi_\nu < \sqrt{2(\nu+1)(\nu+3)}$$
$$\sqrt{\nu(\nu+2)} < \xi'_\nu < \sqrt{2\nu(\nu+1)}$$
$$\sqrt{\nu(\nu-1)} < \xi''_\nu < \sqrt{\nu^2-1}$$

Якщо конкретний корінь лінійно-незалежного розв'язку рівняння Беселя розглядати як функцію від значення параметра — індексу ν, то виявиться, що цю функцію теж можна розглядати як безперервно зростаючу функцію аргументу ν.

При зростанні індексу ν — параметра перший ненульовий корінь розв'язку рівняння Беселя віддаляється від нуля. Те ж саме відбувається і з кожним наступним коренем розв'язку рівняння Беселя, що розглядається як параметрична функція від аргументу ν.

З приведених вище міркувань виходить, що якщо розв'язок рівняння Беселя має корені, відмінні від нуля, то ці корені утворюють безкінечну множину.

При наближенні значення змінної до безкінечності на позитивній піввісі інтервал між коренями цього розв'язку наближається до постійної величини. Взагалі, дослідження поведінки коренів є складним завданням.

Відповідно до припущення Бурже, різні розв'язки рівняння Беселя — функції Беселя, індекс яких відрізняється на ціле число, не мають спільних коренів за винятком нульового.

З приведених міркувань можна зробити наступні висновки про особливості поведінки коренів розв'язків рівняння Беселя — зокрема, поведінки функцій Беселя ненегативного індексу, обмежених в нулі.

Ми довели, що функції Беселя, індекс яких відрізняється на одиницю, мають переміжні корені (наочна ілюстрація приведена на мал. 4). Більш того, ми показали, що для однієї функції Беселя значення досяжного екстремуму (мінімуму або максимуму) строго не співпадає з нулем другої функції Беселя, і навпаки (є зсув один щодо одного).

Це пов'язано із застосуванням теореми Ролля для доказу існування коренів до добутку функції Беселя, помноженої на деяку монотонну функцію, що не міняє знак (в даному випадку степеневу), — відношення (2.9.6) та (2.9.8).

Ця особливість відрізняє функції Беселя від тригонометричних коливальних функцій, в яких екстремум однієї функції строго співпадає з нулем іншої, і дуже ускрутнює аналітичний пошук розв'язків — крапок, де виконується тотожність:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} J_\nu(x)\right) = \frac{d}{dx} F_\nu(x) = 0 \qquad (2.9.16)$$

Раніше було доведено, що функції Беселя ненульового індексу мають корінь в нулі та в деякій його околі зростають. Оскільки на безкінечності функції Беселя асимптотично наближаються до нуля (мають асимптотичний корінь), це означає, що між нулем і безкінечністю існує хоча б один досяжний (кінцевий) максимум функції Беселя. Існування хоча б одного максимуму функцій Беселя позитивного індексу доведене.

Розглянемо поведінку першого кореня і першого максимуму, які знаходяться щонайближче до початку координат, у функцій Беселя строго позитивного індексу. Позначимо відповідно параметричні функції:

$$\zeta(\nu) \text{— перший максимум } J_\nu(x) \qquad (2.9.17)$$

$$\xi(\nu) \text{— перший після нуля корінь } J_\nu(x) \text{ для } \nu > 0$$

Виходитимемо з положення, що корінь існує.

Оскільки функція, що описує поведінку першого кореня залежно від значення параметра, є такою, що монотонно зростає із зростанням індексу, і нульовий корінь існує, це також означає, що при убуванні індексу перший ненульовий корінь наближається до нуля.

Між нулем і першим коренем у функції Беселя знаходиться максимум, який також поступово зміщується до початку координат при убуванні індексу.

Функція Беселя нульового індексу та її значення в нулі, що дорівнює одиниці, є результатом граничної поведінки введених в розгляд параметричних функцій при наближенні значення індексу до нуля в околі початку координат (нуля):

$$\xi(\nu) \to 0 \text{ при } \nu \to 0 \quad \text{й} \quad \zeta(\nu) \to 0 \text{ при } \nu \to 0$$

$$\lim_{\nu \to 0} \zeta(\nu) = J_0(0) = 1$$

Фактично, при наближенні значення індексу до нуля поблизу початку координат перший максимум також наближається до початку координат, поки в нулі не «злипається» з ним, що пояснює уявний парадокс і особливість поведінки в нулі функцій Беселя нульового індексу.

Поведінка функцій Беселя дуже великого індексу також розглядається окремо. При проведенні більшості доказів, пов'язаних із розкладеннями в ряд, ми кожного разу припускали, що значення індексу функцій Беселя звичайне. Проте при наближенні індексу функцій Беселя до безкінечності перший максимум необмежено відсовується від початку координат до безкінечності, а його значення зменшується.

Тому при граничному значенні індексу, рівного безкінечності (випадок, що не розглядається в теорії), асимптотичний максимум співпаде з асимптотичним нулем, і функція Беселя безкінечного індексу вироджується в пряму, що співпадає з числовою піввіссю.

На практиці при проведенні достатньо точних обчислень і побудові досить точних моделей при розкладенні в ряд за функціями Беселя використовують не більше 8-12 послідовних функцій Беселя, пов'язаних один з одним рекурентними відношеннями. А для рядових моделей використовується не більше 3-4 функцій Беселя.

На сьогодня найбільш простим і реальним способом знаходження коренів і досяжних екстремумів (мінімумів та максимумів) функцій Беселя й Неймана позитивного індексу поблизу початку координат і на деякому віддаленні від нього є використання сучасної комп'ютерної техніки і методів розкладення в ряди.

Комп'ютери повинні мати ядро процесора для проведення коректних обчислень з плаваючою крапкою і вбудований в процесор математичний апарат, що дозволяє здійснювати математичні обчислення з дуже високою точністю. Точність обчислень процесора повинна бути істотно (на багато порядків) вище за ту задану точність, з якою проводяться конкретні алгоритмічні обчислення користувачем з використанням рядів.

Перед проведенням конкретних обчислень з використанням функцій Беселя і Неймана рекомендується аналітично вивчити рівняння і використовувані для нього розкладення і функції. Поведінка функцій Беселя, що розглядаються як параметричні функції від значення індексу, є «достатньо хорошою» — функції, у яких індекс трохи відрізняється один від одного, поводяться дуже схожим чином і в наближених практичних математичних моделях можуть бути з успіхом замінені одна іншою.

При практичних обчисленнях функції Беселя, індекс яких близький до цілих і напівцілих значень, можна їх замінювати на відповідні дуже добре вивчені функції Беселя цілого та напівцілого індексу, роблячи деяку поправку на точність обчислень (наприклад, потрібно брати дещо більше членів розкладення ряду для поправки точності). Функції Беселя цілого індексу практично добре вивчені, а значення напівцілого індексу дозволяють використовувати для них кінцеві розкладення в ряд за аналітичними функціями.

Ніколи не можна використовувати дуже велику кількість функцій Беселя для побудови ітерацій, оскільки надмірне збільшення їх кількості ніколи не приведе до підвищення точності практичних комп'ютерних обчислень, а тільки створить невиправдані навантаження на обчислювальну техніку, процесор і може погіршити збіжність окремих обчислювальних алгоритмів. У випадках використання некоректних процесорів результат надмірних обчислень може бути надто погіршений із-за лавиноподібного накопичення погрішності обчислень.

Таблиця значень функцій Беселя цілого і напівцілого індексу при цілих значеннях змінної

ν	$J_\nu(1)$	$J_\nu(2)$	$J_\nu(3)$	$J_\nu(4)$	$J_\nu(5)$
0	0.765	0.224	0.260	0.397	0.178
0.5	0.671	0.513	0.065	0.302	0.342
1	0.440	0.577	0.339	0.066	0.328
1.5	0.240	0.491	0.478	0.185	0.170
2	0.115	0.353	0.486	0.364	0.017
2.5	0.050	0.224	0.413	0.441	0.240
3	0.020	0.129	0.309	0.130	0.365
3.5	0.007	0.069	0.210	0.366	0.410
4	0.002	0.034	0.132	0.281	0.391
4.5	0.001	0.016	0.078	0.199	0.334
5	0.000	0.007	0.043	0.132	0.261
5.5	0.000	0.002	0.022	0.083	0.191
6	0.000	0.001	0.011	0.049	0.131
6.5	0.000	0.000	0.001	0.028	0.086

Перші п'ять коренів функцій Беселя цілого індексу ν = 0, 1, 2 та 3

корені	$J_0(x)=0$	$J_1(x)=0$	$J_2(x)=0$	$J_3(x)=0$	$\mathcal{N}_0(x)=0$
1	**2.405**	**3.832**	**5.136**	**6.380**	**0.894**
2	**5.520**	**7.016**	**8.417**	**9.761**	**3.958**
3	**8.654**	**10.173**	**11.620**	**13.015**	**7.086**
4	**11.791**	**13.324**	**14.796**	**16.223**	**10.222**
5	**14.931**	**16.471**	**17.960**	**19.409**	**13.361**

Приведені таблиці наочно показують характер поведінки коренів функцій Беселя та дають наближені значення функцій Беселя з точністю до четвертого знаку після коми.

Таблиця значень функцій Беселя і Неймана

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$\mathcal{N}_0(x)$	$\mathcal{N}_1(x)$	$\mathcal{N}_2(x)$
0	**1.0**	**0.0**	**0.0**	—	—	—
0.5	0.938	0.242	0.031	-0.445	-1.471	-5.440
1	0.765	0.440	0.115	**0.088**	-0.781	-1.651
1.5	0.512	0.558	0.232	0.382	-0.421	-0.932
2	0.244	0.577	0.353	0.510	**-0.107**	-0.617
2.5	**-0.048**	0.497	0.446	0.498	0.146	-0.381
3	-0.260	0.339	0.486	0.377	0.325	-0.160
3.5	-0.380	0.137	0.459	0.189	0.410	**0.045**
4	-0.397	**-0.066**	0.364	**-0.017**	0.398	0.216
4.5	-0.321	-0.231	0.218	-0.195	0.301	0.338
5	-0.178	-0.328	**0.046**	-0.309	0.148	0.368
5.5	**-0.007**	-0.341	-0.117	-0.339	**-0.024**	0.331
6	0.151	-0.277	-0.243	-0.288	-0.175	0.230
6.5	0.260	-0.154	-0.307	-0.173	-0.274	0.089
7	0.300	**-0.005**	-0.301	**-0.026**	-0.303	**-0.061**
7.5	0.266	0.135	-0.230	0.117	-0.259	-0.186
8	0.172	0.235	-0.113	0.244	-0.158	-0.263
8.5	**0.042**	0.273	**0.022**	0.270	**-0.026**	-0.276
9	-0.090	0.245	0.145	0.250	0.104	-0.227
9.5	-0.194	0.161	0.228	0.171	0.203	-0.128
10	-0.246	**0.043**	0.255	**0.056**	0.249	**-0.006**
11	-0.171	-0.177	0.139	-0.169	0.164	0.199
12	**0.048**	-0.224	**-0.085**	-0.225	**-0.057**	0.216
13	0.207	**-0.070**	-0.218	**-0.078**	-0.210	**0.046**
14	0.171	0.133	-0.152	0.127	-0.167	-0.151
15	**-0.014**	0.205	**0.042**	0.205	**0.021**	-0.203

Приведені таблиці не є дуже докладними, оскільки їх основна мета — дати загальне уявлення про поведінку функцій Беселя і Неймана поблизу початку координат. Інтервали, де функції мають негативне значення, забарвлені. Найбільш близькі до коренів значення функцій виділені жирним шрифтом.

§ 10. Асимптотична поведінка функцій Беселя та Неймана

Дослідивши поведінку функцій Беселя і функцій Неймана недалеко від початку координат (поблизу нуля), ми перейдемо до докладнішого вивчення асимптотичної поведінки цих функцій далеко від початку координат, при наближенні змінної до безкінечності для обмежених індексів (параметрів рівняння).

Ми відмітили, що при наближенні змінної до безкінечності рівняння Штурма-Ліувіля, до якого приводиться рівняння Беселя:

$$y_\nu''(x) - \frac{(\nu - 1/2)(\nu + 1/2)}{x^2} y_\nu(x) = -y_\nu(x) \qquad (2.1.5)$$

$$J_\nu(x) = y_\nu(x)/\sqrt{x} \quad \text{для всіх } \nu \qquad (2.1.6)$$

наближається до типового хвильового рівняння:

$$y''(x) + y(x) = 0 \quad \text{для всіх } \nu \qquad (2.9.2)$$

Раніше ми встановили, то для напівцілих значень функцій Беселя позитивного і негативного індексу можна отримати кінцеве розкладення в ряд через степеневі та тригонометричні функції. Функції Беселя напівцілого індексу можуть бути точно виражені кінцевим рядом елементарних функцій. Отримане розкладення за елементарними функціями було виконане на підставі рекурентних відношень розв'язків рівняння Беселя і базового розв'язку хвильового рівняння.

Виходячи із загальних міркувань про схожість поведінки функцій Беселя, що мають близький індекс, можна допустити, що поблизу всіх напівцілих значень індексу функції Беселя також поводяться дуже схоже. Тому поведінку будь-яких функцій Беселя можна описати, використовуючи метод послідовних наближень — інтерполяцію кінцевими рядами степеневих і тригонометричних функцій, аналогічних тим, які використовуються для отримання функцій Беселя з напівцілими індексами.

Розкладення для функцій Беселя напівцілого індексу можна представити через добуток синусів і косинусів, змінного половинного ступеня і кінцевих степеневих рядів негативного ступеня.

Тому й є всі підстави припускати, що асимптотична поведінка розв'язків рівняння Беселя також може бути отримана через степеневі та тригонометричні функції методом послідовних наближень.

Щоб отримати наближення для функцій Беселя, розглянемо рівняння Штурма-Ліувіля, до якого зводиться рівняння Беселя, і шукатимемо послідовні наближення для розв'язків рівняння, схожого з хвилевим на віддаленні від початку координат:

$$y''(x)+\left(\frac{\omega}{x^2}+1\right)y(x)=0 \qquad (2.10.1)$$

$$y(x)\cong\sum_{k=0}^{m}x^{-k}\left(V_k\sin x+W_k\cos x\right)+o(x^{-m}) \qquad (2.10.2)$$

і використовується позначення $\lim\limits_{z\to\infty} o(z)/z=0$

Для нульового наближення ми отримаємо класичний розв'язок хвильового рівняння — через тригонометричні функції. Далі застосуємо метод математичної індукції. Розглянемо $\boldsymbol{m}$ наближення. Підставимо ряд (2.10.2) в рівняння (2.10.1) і нехтуватимемо всіма членами ряду, ступінь яких більше $\boldsymbol{m}$ і складає $o(x^{-m})$. Це допущення дозволить отримати значення коефіцієнтів ряду.

$$\sum_{k=0}^{m}2(-k)\left(V_k\cos x-W_k\sin x\right)x^{-k-1}+$$
$$+(-k)(-k-1)\left(V_k\sin x+W_k\cos x\right)x_{-k-2}+$$
$$+\left(V_k\sin x+W_k\cos x\right)\omega\, x^{-k-2}\cong 0 \qquad (2.10.3)$$

Домножимо отриманий ряд на змінну x і проігноруємо член ряду при ступені $-(m+1)$

$$\sum_{k=0}^{m}-2k\left(V_k\cos x-W_k\sin x\right)x^{-k}+$$
$$+\left(V_k\sin x+W_k\cos x\right)x^{-k-1}\left(k(k+1)+\omega\right)\cong 0$$

$$\sum_{k=0}^{m}-2k\left(V_k\cos x-W_k\sin x\right)x^{-k}+\sum_{k=1}^{m}x^{-k}\left(\omega+\right.$$
$$\left.+k(k-1)\right)\left(V_{k-1}\sin x+W_{k-1}\cos x\right)+o(x^{-m})\cong 0$$

У тому випадку, коли індекс (параметр) розв'язок рівняння Штурма-Ліувіля є напівцілим, кількість членів ряду буде зупинена на деякому значенні. Інакше використовуються послідовні наближення, кількість яких формально не обмежена.

Обмеження на початкові коефіцієнти відсутні та залежать від конкретних початкових умов і допущень, тому наступні коефіцієнти довільні

V_0 й W_0 довільні за вибором константи і

$$\begin{array}{l|l} x^{-k}\cos x & -2kV_k+\left(\omega+k(k-1)\right)W_{k-1}=0 \\ x^{-k}\sin x & 2kW_k+\left(\omega+k(k-1)\right)V_{k-1}=0 \end{array}$$

Звідси отримаємо набір рекурентних відношень:

$$V_k=W_{k-1}\left(\omega+k(k-1)\right)\big/2k \qquad (2.10.4)$$
$$W_k=-V_{k-1}\left(\omega+k(k-1)\right)\big/2k$$

Таким чином, ми знайшли значення коефіцієнтів для довільної обмеженої ітерації — кінцевого ряду наближення. Оскільки рекурентні відношення для коефіцієнтів стартують з нульових, довільних за вибором, користуючись методом математичної індукції, ми можемо записати рекурентні відношення для коефіцієнтів будь-якого кінцевого члена ряду розкладення.

$$V_1=W_0 \text{ и } W_1=-V_0 \quad \omega=(1/2-\nu)(1/2+\nu)$$

$$V_k=-V_{k-2}\frac{\left(\omega+k(k-1)\right)\left(\omega+(k-1)(k-2)\right)}{4k(k-1)}$$

$$W_k=-W_{k-2}\frac{\left(\omega+k(k-1)\right)\left(\omega+(k-1)(k-2)\right)}{4k(k-1)}$$

На віддаленій від початку координат множині змінних ряд досить добре сходиться і при наближенні змінної до безкінечності досить точно описує асимптотичну поведінку розв'язків рівняння Беселя.

Погрішність обчислень складає x^{-k-2}.

Тому при достатньо великих значеннях змінної представлене асимптотичне розкладення в ряд мало відрізняється від точного розв'язку рівняння. При достатньо великих значеннях змінної функції Беселя, Неймана та їх лінійні комбінації можуть бути обчислені за допомогою асимптотичної формули:

$$z(x) \cong \sum_{k=0}^{m} x^{-k-1/2}\left(V_k \sin x + W_k \cos x\right) \qquad (2.10.5)$$

Позначимо степеневі ряди як (2.10.6)

$$V(x)=\sum_{k=0}^{m} V_k x^{-k} \quad \text{й} \quad W(x)=\sum_{k=0}^{m} W_k x^{-k}$$

$$z(x) \cong \left(V(x)\sin x + W(x)\cos x\right) x^{-1/2} \qquad (2.10.7)$$

Перетворимо отримане відношення у форму, зручнішу для вивчення асимптотичної поведінки розв'язків рівняння Беселя на безкінечності. Розділимо праву і ліву частину відношення (2.10.7) на вираз:

$$x^{-1/2}\sqrt{V^2(x)+W^2(x)} \qquad (2.10.8)$$

Ми отримали наступне відношення:

$$\frac{z(x)x^{1/2}}{\sqrt{V^2(x)+W^2(x)}} = \frac{V(x)}{\sqrt{V^2(x)+W^2(x)}}\sin x + \frac{W(x)}{\sqrt{V^2(x)+W^2(x)}}\cos x$$

Видно, що в лівій частині відношення стоять фактичні значення синусів і косинусів. Застосуємо формули складання аргументів тригонометричних функцій.

$$\cos\psi = \frac{V(x)}{\sqrt{V^2(x)+W^2(x)}} \qquad \sin\psi = \frac{W(x)}{\sqrt{V^2(x)+W^2(x)}}$$

і введемо позначення $\varsigma = \sqrt{V^2(x)+W^2(x)}$ (2.10.9)

Тоді вираз (2.10.7) можна переписати у вигляді:

$$z(x)\, x^{1/2}/\varsigma = \cos\psi \sin x + \sin\psi \cos x$$

$$z(x) = \sin\left(x+\psi\right) \varsigma\, x^{-1/2} \qquad (2.10.10)$$

Виразимо в явній формі значення ψ :

$$\operatorname{tg}\psi = \sin\psi/\cos\psi = W(x)/V(x)$$

Звідси $\psi = \operatorname{arc\,tg}\left(W(x)/V(x)\right)$

І формулу асимптотичного розкладення для розв'язків рівняння Беселя на віддалених від початку координат значеннях змінної можна виразити таким чином:

$$z(x) = \varsigma\, x^{-1/2}\sin\left(x + \operatorname{arc\,tg}\left(W(x)/V(x)\right)\right)$$

Ще одна еквівалентна формула асимптотичного розкладення може бути отримана, якщо ми введемо інші еквівалентні відношення:

$$\sin\phi = \frac{V(x)}{\sqrt{V^2(x)+W^2(x)}} \qquad \cos\phi = \frac{W(x)}{\sqrt{V^2(x)+W^2(x)}}$$

Тоді вираз (2.10.7) можна переписати у вигляді:

$$z(x)\, x^{1/2}/\varsigma = \sin\phi \sin x + \cos\phi \cos x$$

$$z(x) = \cos\left(x-\phi\right) \varsigma\, x^{-1/2} \qquad (2.10.11)$$

І формулу асимптотичного розкладення можна виразити ще одним еквівалентним чином:

$$z(x) = \varsigma\, x^{-1/2}\cos\left(x - \operatorname{arc\,tg}\left(V(x)/W(x)\right)\right)$$

Твердження 7. *Поведінка розв'язків рівняння Беселя при значеннях змінної, віддалених від початку координат, виражається еквівалентними формулами:*

$$z(x) \sim \sqrt{V_0^2 + W_0^2}\; x^{-1/2} \sin\left(x + \operatorname{arc\,tg}\left(W_0 / V_0\right)\right)$$
$$z(x) \sim \sqrt{V_0^2 + W_0^2}\; x^{-1/2} \cos\left(x - \operatorname{arc\,tg}\left(V_0 / W_0\right)\right)$$

$$\text{где } z(x) \cong \left(V(x)\sin x + W(x)\cos x\right) x^{-1/2} \qquad (2.10.7)$$

$$\text{й } V(x) = \sum_{k=0}^{m} V_k x^{-k} \quad \text{та} \quad W(x) = \sum_{k=0}^{m} W_k x^{-k}$$

Доказ. Доказ цього твердження виходить з особливостей асимптотичної поведінки негативних ступенів у степеневих рядів при значеннях змінної, віддалених від нуля і прагнучих до безкінечності, які при цьому наближаються до значень відповідних нульових констант.

Твердження доведене.

Формули асимптотичної поведінки будь-яких розв'язків рівняння Беселя з обмеженим аргументом показують в явній формі, що при віддаленні від початку координат цей розв'язок носять коливальний характер з періодом, близьким до коливальних тригонометричних функцій з деяким зсувом відносно початку координат. Максимуми і мінімуми функції при цьому наближаються до нуля при зростанні значення змінної.

Наприклад, для невеликих значень індексу функцій Беселя, вже при значенні змінної $x>8$ приблизний інтервал між коренями вже рівний $\pi \approx 3{,}14$...

Дослідження отриманих асимптотичних розкладень розв'язків рівняння Беселя з обмеженим індексом (параметром) дозволяє припустити наявність безкінечного числа максимумів і мінімумів функції та існування безкінечного числа коренів цих функцій.

Формули асимптотичного розкладення дозволяють отримати приблизні значення цього кореня і екстремумів при віддалених від нуля значеннях змінної.

Чим менше по модулю індекс рівняння Беселя, тим швидше і точніше отримані розкладення наближаються до точних значень розв'язків рівняння Беселя і тим ближче до початку координат можна використовувати отримані в цьому параграфі розкладення.

Чим більше значення змінної, тим точніше забезпечується збіжність і тим менше членів асимптотичного розкладення можна використовувати для достатньо точних практичних обчислень.

На практиці часто застосовують конкретні формули, які не містять ніяких довільних постійних і забезпечують обчислення з помилкою порядку $x^{-5/2}$

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\cos(x-p) - \frac{4\nu^2-1}{8x} \sin(x-p)\right)$$
$$\mathcal{N}_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\sin(x-p) + \frac{4\nu^2-1}{8x} \cos(x-p)\right)$$
$$\text{де} \quad p = \pi(2\nu+1)/4 \qquad (2.10.12)$$

Для порівняння приведемо обчислення двох значень змінною для функцій Беселя і Неймана з використанням розкладень (2.10.12). Обчислення були перевірені вручну на персональному комп'ютері з використанням вбудованої програми мікрокалькулятора з розширеними можливостями. У дужках для порівняння вказані значення з вищою точністю, взяті з таблиць цих функцій.

$$J_1(10) \approx 0{,}0433 \;\; (0{,}0435)$$
$$\mathcal{N}_0(10) \approx 0{,}0557 \;\; (0{,}0557)$$
$$\mathcal{N}_1(10) \approx 0{,}2488 \;\; (0{,}2490)$$

Таким чином, ми досліджували можливості отримання наближених значень розв'язків рівняння Беселя як недалеко від нуля, так і при віддалених від початку координат значеннях змінної.

Отримані формули дозволяють проводити обчислення з дуже високою точністю, використовуючи достатньо малу кількість членів ряду того чи іншого розкладення.

Завдання побудови асимптотичних розкладень представляють величезні складноці, оскільки при їх рішенні доводиться мати справу з рядами, що розходяться, але які в деякій області зручні для обчислень і забезпечують просту оцінку погрішності.

При розгляді асимптотичних розкладень розв'язків рівняння Беселя виникають три різні класи задач залежно від поведінки індексу і змінної.

Найбільший інтерес представляє практичні задачі, при яких індекс (параметр) функції фіксований, а змінна прямує до безкінечності. Найбільш популярними і зручними в цьому випадку виявляються розкладення, отримані Ганкелем, які ми приводимо тут без доказу:

Хай $p=\pi(2\nu+1)/4$ при $\nu \ll \infty$ й $x \to \infty$

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\cos(x-p)\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(\nu,2k)}{(2x)^{2k}} - \right.$$

$$\left. -\sin(x-p)\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(\nu,2k+1)}{(2x)^{2k+1}}\right) \tag{2.10.13}$$

$$\mathcal{N}_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\sin(x-p)\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(\nu,2k)}{(2x)^{2k}} + \right.$$

$$\left. +\cos(x-p)\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(\nu,2k+1)}{(2x)^{2k+1}}\right) \tag{2.10.14}$$

Де $$(\nu,k) = \frac{\Gamma(\nu+k+1/2)}{k!\,\Gamma(\nu-k+1/2)} \tag{2.10.15}$$

Залишковий член розкладення для рядів, отриманих Ганкелем, має той же порядок, що і перші відкинуті члени ряду. Для функцій Беселя й Неймана залишок чисельно менше першого відкиданого члена ряду і має той же знак.

Якщо використовувати $\boldsymbol{m}$ членів асимптотичного розкладення Ганкеля та величина $(2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}-1/2)$ мала в порівнянні з $\boldsymbol{x}$, то отриманий залишок приблизно рівний половині відкинутого члена ряду.

Якщо в представлення функцій, які є лінійними комбінаціями функцій Беселя та Неймана і є розв'язком рівняння Беселя, підставити асимптотичні розкладення Ганкеля для функцій Беселя і Неймана (за умови, що ці розкладення в даному конкретному випадку можуть бути застосовні на практиці), це відразу дозволить отримати асимптотичні розкладення цих функцій.

Інші завдання побудови асимптотичних розкладень стоять, коли значення індексу і змінної безкінечно зростають, але різниця між ними залишається постійною константою, і у випадках, коли відношення змінної і індексу фіксовані при зростанні значення змінної. Всі отримані раніше формули асимптотичних розкладень в цих випадках не можуть бути застосованими.

$$x \to \infty \quad \text{й} \quad x-\nu \cong \boldsymbol{const} \tag{2.10.16}$$

$$x \to \infty \quad \text{й} \quad x/\nu \cong \boldsymbol{const}$$

Питання розв'язку таких асимптотичних задач відносяться до дуже складних питань і в цьому параграфі не розглядаються. На практиці завдання з подібними умовами зустрічаються достатньо рідко і не є поширеними математичними моделями.

Тому перед використанням тих чи інших асимптотичних розкладень завдання необхідно детально аналітично досліджувати і встановлювати відсутність або наявність «критичних» обмежень (2.10.16).

У більшості випадків, коли ми можемо використовувати асимптотичні розкладення Ганкеля (2.10.13) і (2.10.14) або подібні до них асимптотичні розкладення з використанням степеневих рядів і тригонометричних функцій, треба пам'ятати — вони утворюють ряди, що розходяться. Тому при достатньо великих значеннях індексу їх потрібно використовувати з оглядом та обережністю.

Поблизу початку координат рекомендується використовувати не асимптотичні розкладення, а пряме розкладення в ряд за степеневими функціями. У деякій «середній» області можна використовувати обидва типи розкладень — степеневі ряди, що сходяться, і асимптотичні розкладення, що розходяться, і потім порівняти отримані результати між собою.

§ 11. Приведення диференціальних рівнянь другого порядку до рівняння Беселя

У цьому розділі розглядається питання про те, які диференціальні рівняння можуть бути приведені до рівняння Беселя. Надзвичайно принадними для практичних досліджень є лінійні диференціальні рівняння другого порядку, що явно приводяться до рівняння Беселя шляхом деякої заміни з використанням аналітичних функцій.

Історично склалося так, що питання приводимості тих чи інших диференціальних рівнянь до рівняння Беселя вирішувалися різними математиками в різний час для конкретних задач, що вивчалися ними, і конкретних математичних моделей. Тому аспекти приводимості швидше нагадують зведення тих чи інших практично цікавих результатів і деяких узагальнень окремих випадків, що приводяться до тих чи інших рівнянь Беселя. Виклад деяких критеріїв проводився Ломмелем.

До деяких однорідних і неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку можуть приводити як математичні моделі одновимірних фізичних процесів, так і використання методу розділення змінних в рівняннях математичний фізики з частинними похідними. Загальний вид таких диференціальних рівнянь в більшості випадків не говорить про те, що вони можуть або не можуть приводитися до добре вивченого випадку — рівняння Беселя, і мати розв'язок, що виражається через елементарні та циліндрові функції.

Тому було проведено узагальнення критеріїв приводимості однорідних диференціальних рівнянь другого порядку до рівняння Беселя.

Використаємо той самий підхід, який з самого початку викладу ми застосували для приведення класичних рівнянь Беселя до рівняння Штурма-Ліувіля, і визначимо загальні критерії приводимості. Розглянемо загальний випадок приведення двох лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Теорема 6. Критерій приводимості. *Однорідне диференціальне рівняння другого порядку вигляду:*

$$F_2(x)z''(x)+F_1(x)z'(x)+F_0(x)z(x)=0 \qquad (2.11.1)$$

може бути приведено до іншого рівняння вигляду:

$$u''(x)+Q(x)u'(x)+G(x)u(x)=0 \qquad (2.11.2)$$

з використанням аналітичної заміни вигляду:

$$u(x)=\exp\left(\int^{x} U(\xi)d\xi\right)z(x) \qquad (2.11.3)$$

$$\text{де } U(x)=\big(E(x)-Q(x)\big)\big/2 \qquad (2.11.4)$$

$$E(x)=F_1(x)\big/F_2(x) \text{ и } H(x)=F_0(x)\big/F_2(x)$$

якщо тотожно виконується умова:

$$U'(x)+U^2(x)+Q(x)U(x)=H(x)-G(x) \qquad (2.11.5)$$

Доказ. Рівняння Беселя є окремим випадком більш загального випадку, що зараз розглядається.

Розглянемо диференціальне рівняння (2.11.1). Розділивши його праву частину на невироджений потенціал при другій похідній зведемо це рівняння до більш зручнішого для подальшого розгляду вигляду:

$$z''(x)+E(x)z'(x)+H(x)z(x)=0 \qquad (2.11.6)$$

Припустимо, що аналітична заміна, яка пов'язує розв'язок рівняння (2.11.6) і рівняння (2.11.2), існує та може бути представлена у вигляді:

$$u(x)=A(x)z(x) \qquad (2.11.7)$$

Підставимо заміну в рівняння (2.11.2) і отримаємо наступний вираз:

$$0=A(x)z''(x)+2A'(x)z'(x)+A''(x)z(x)+$$
$$+Q(x)\big(A'(x)z(x)+A(x)z'(x)\big)+G(x)A(x)z(x)$$

Помножимо рівняння (2.11.6) на $P(x)$

$$0=A(x)z''(x)+E(x)A(x)z'(x)+H(x)A(x)z(x)$$

Тотожна рівність отриманих рівнянь забезпечується тотожною рівністю потенціалів при кожній похідній:

$$\begin{array}{l|l} z''(x) & A(x)=A(x) \\ z'(x) & E(x)A(x)=2A'(x)+Q(x)A(x) \\ z(x) & H(x)A(x)=A''(x)+Q(x)A'(x)+G(x)A(x) \end{array} \qquad (2.11.8)$$

Елементарне диференціальне рівняння першого порядку при першій похідній функції дозволяє відразу записати загальне подавання для заміни.

$$A'(x)\big/A(x)=\big(E(x)-Q(x)\big)\big/2 \qquad (2.11.9)$$

Формально проінтегрувавши отриманий вираз та ввівши для зручності нове позначення (2.11.4), ми отримаємо потенціал для загального виду заміни (2.11.3), який було потрібно відшукати:

$$A(x)=\exp\int^{x}\big(E(\xi)-Q(\xi)\big)\big/2d\xi=\exp\int^{x}U(\xi)d\xi$$

Отримана з (2.11.8) тотожність при нульовій похідній функції дозволяє точно описати умови і отримати чіткі критерії, за якими перетворення одного диференціального рівняння другого порядку в інше можливе. Скористаємося тим, що

$$A'(x)=U(x)A(x) \text{ и } A''(x)=\big(U'(x)+U^2(x)\big)A(x)$$

Підставимо значення потенціалу заміни (2.11.4) і його похідних в друге рівняння і далі спростимо:

$$H(x)=U'(x)+U^2(x)+Q(x)U(x)+G(x)$$

Таким чином, ми отримали необхідні умови існування заміни. В усіх міркуваннях ми вважали та припускали, що всі необхідні похідні та інтеграли існують. Доказ цього потрібно проводити для кожного конкретного випадку рівнянь, що розглядаються на практиці, перед застосуванням самої теореми. ***Теорема доказана.***

Слідство 1. *Класичне рівняння Беселя*

$$x^2z''(x)+xz'(x)+(x^2-\nu^2)z(x)=0 \qquad (2.1.1)$$

приводиться до рівняння Штурма-Ліувіля вигляду

$$y''(x)-\frac{(\nu-1/2)(\nu+1/2)}{x^2}y(x)=-y(x) \qquad (2.1.5)$$

за допомогою заміни: $y(x)=x^{1/2}z(x)$

Доказ. У теоремі 6 усі операції проводяться над деякими абстрактними «хорошими» функціями. У конкретних застосуваннях можуть бути відомі потенціали одного або двох диференціальних рівнянь. У даному випадку нам відомі значення наступних потенціалів (у позначеннях теореми 6):

$Q(x)=0$ у рівнянні (2.1.5) Штурма-Ліувіля

$E(x)=1/x$ й $H(x)=(x^2-\nu^2)/x^2$ для (2.1.11)

Потенціал і загальний вид заміни відповідно до (2.11.3) і (2.11.4) можна отримати за формулою:

$$U(x)=\big(E(x)-Q(x)\big)\big/2=1\big/2x$$

$$y(x)=\exp\Big(\int^{x}U(\xi)d\xi\Big)z(x)=x^{1/2}z(x)$$

Встановимо значення потенціалу при нульовій похідній для рівняння Штурма-Ліувіля, скориставшись відношенням (2.11.5) теореми 6.

$$U'(x)+U^2(x)+Q(x)U(x)=H(x)-G(x) \qquad (2.11.5)$$

для рівняння $y''(x)+G(x)y(x)=0$

Звідси $G(x)=-U'(x)-U^2(x)-Q(x)U(x)+H(x)$

або $G(x)=1-(\nu-1/2)(\nu+1/2)\big/x^2$

Таким чином, доведено існування заміни між двома даними рівняннями. ***Слідство доведене.***

Слідство 2. *До класичного рівняння Беселя*

$$x^2 z''(x) + xz'(x) + (x^2 - \nu^2) z(x) = 0 \qquad (2.1.1)$$

приводиться диференціальне рівняння вигляду

$$u''(x) + Q(x)u'(x) + G(x)u(x) = 0 \qquad (2.11.2)$$

з використанням аналітичної заміни вигляду:

$$u(x) = \exp\left(\int^{x} U(\xi)\,d\xi\right) z(x) \qquad (2.11.10)$$

де $U(x) = \left(1/x - Q(x)\right)\Big/2$ (2.11.11)

й існує така константа $\nu \geqslant 0$ *(індекс),*
що тотожно виконується умова: (2.11.12)

$$U'(x) + U^2(x) + Q(x)U(x) = \left(1 - \nu^2/x^2\right) - G(x)$$

Для отримання цього слідства ми замінили абстрактне рівняння (2.11.1) на конкретне класичне рівняння Беселя в позначеннях теореми 6.

Слідство 2 надає критерії, за якими здійснюється перевірка критеріїв приводимості деякого лінійного диференціального рівняння другого порядку до рівняння Беселя. Необхідно отримати потенціал (2.11.11), підставити в умови (2.11.12) цей потенціал і потенціали рівняння, що перевіряється (2.11.2).

Якщо вдасться підібрати таку константу ν, за якої ці умови (2.11.12) виконуються тотожно, це означає, що базове рівняння можна відразу ж привести до рівняння Беселя за допомогою аналітичної заміни.

Слідство 3. *Якщо два диференціальні рівняння можна привести до одного і того ж третього диференціального рівняння, використовуючи приведення теореми 6, це означає, що ці два рівняння можна привести один до одного і заміна (2.11.3) існує.*

Доказ є природним слідством лінійності критерію (2.11.5) й інших властивостей використовуваних в теоремі 6 перетворень. В деяких випадках використання цього слідства може виявитися дуже зручним.

У загальному випадку, що є природним слідством теореми 6, можна сформулювати наступне положення. Якщо для двох диференціальних рівнянь вигляду (2.11.2) і (2.11.6) існує пара таких замін, які дозволяють привести ці два диференціальні рівняння до одного і того ж однорідного диференціального рівняння другого порядку, це означає, що два рівняння можуть бути приведені один до одного з використанням заміни теореми 6.

Цей критерій може полегшити дослідження деяких класів диференціальних рівнянь.

Слідство 4. *Будь-яке невироджене однорідне диференціальне рівняння другого порядку вигляду:*

$$u''(x) + Q(x)u'(x) + G(x)u(x) = 0 \qquad (2.11.2)$$

може бути приведено до рівняння вигляду:

$$\varphi''(x) + q(x)\varphi(x) = 0 \qquad (2.11.13)$$

за допомогою заміни вигляду:

$$u(x) = \exp\left(-\int^{x} Q(\xi)/2\ d\xi\right)\varphi(x) \qquad (2.11.14)$$

де $q(x) = G(x) - Q'(x)/2 - Q^2(x)/4$ (2.11.15)

Умова цієї леми є окремим випадком теореми 6, коли ми розглядаємо рівняння Штурма-Ліувіля. Будь-яке невироджене однорідне диференціальне рівняння другого порядку може бути лише єдиним чином приведено до рівняння з нульовим потенціалом при першій похідній з точністю до константи (через однорідність).

При побудові рекурентних відношень і асимптотичних формул ми скористалися приведенням рівняння Беселя до рівняння Штурма-Ліувіля вигляду (2.11.13) з нульовим потенціалом при першій похідній і потенціалом при нульвій похідній

$$q(x) = (1/4 - \nu^2 + x^2)/x^2 \qquad (2.11.16)$$

Якщо однорідне диференціальне рівняння також може бути приведено до цього ж самого рівняння, це означає, що воно приводиться й до рівняння Беселя.

У ряді практичних прикладків приведення двох рівнянь теореми 6 може виявитись недостатнім.

Дуже популярним і практичним методом є метод заміни змінних в тому рівнянні, розв'язок якого заздалегідь відомий (для отримання складніших рішень) або в рівнянні, яке потрібно привести до більш тривіальнішого та очевиднішого.

Теорема 7. Заміна змінних. *Однорідне диференціальне рівняння другого порядку вигляду:*

$$z''(x)+E(x)z'(x)+H(x)z(x)=0 \tag{2.11.6}$$

може бути приведено до рівняння вигляду:

$$\omega''(\zeta)+P(\zeta)\omega'(\zeta)+S(\zeta)\omega(\zeta)=0 \tag{2.11.2}$$

за допомогою заміни змінних вигляду:

$$x=\psi(\zeta) \qquad z(x)=z(\psi(\zeta))=\omega(\zeta) \tag{2.11.17}$$

$$P(\zeta)=E(\psi(\zeta))\psi'(\zeta)-\psi''(\zeta)/\psi'(\zeta) \tag{2.11.18}$$

$$S(\zeta)=H(\psi(\zeta))\left(\psi'(\zeta)\right)^2 \tag{2.11.19}$$

Доказ. Поетапно виконаємо заміну змінних і розрахунок нових диференціалів, після чого підставимо отримані дані в друге рівняння і набудемо значення потенціалів.

$$z(x)=z(\psi(\zeta))=\omega(\zeta)$$

$$z'(x)=\frac{dz(x)}{dx}=\frac{d\zeta}{dx}\;\frac{dz(\psi(\zeta))}{d\zeta}=\frac{\omega'(\zeta)}{\psi'(\zeta)}$$

$$z''(x)=\frac{dz'(x)}{dx}=\frac{d\zeta}{dx}\;\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\omega'(\zeta)}{\psi'(\zeta)}\right)=$$

$$=\frac{\omega''(\zeta)\psi'(\zeta)-\omega'(\zeta)\psi''(\zeta)}{\left(\psi'(\zeta)\right)^3}$$

Підставимо отримані відношення в рівняння (2.11.6). ***Теорема доказана.***

Попередження. При використанні теореми 7 про заміну змінних та її формул необхідно пам'ятати, що перед проведенням будь-яких обчислень пари диференціальних рівняння приводяться до наступного вигляду — потенціал при другій похідній в двох рівняннях повинен бути рівний тотожній одиниці.

Окремий інтерес представляє докладний розгляд класичного рівняння Беселя, для якого потенціали приймають такі значення:

$$E(x)=1/x \qquad \text{и} \qquad H(x)=(x^2-\nu^2)/x^2$$

Слідство 1. *Диференціальне рівняння вигляду*

$$\zeta^2\omega''(\zeta)+\zeta\omega'(\zeta)+(a^2\zeta^2-\nu^2)\omega(\zeta)=0 \tag{2.11.20}$$

може бути приведено до класичного рівняння Беселя з використанням заміни змінних:

$$x^2z''(x)+xz'(x)+(x^2-\nu^2)z(x)=0 \tag{2.1.1}$$

$x=a\zeta$ *де a — деяка дійсна, чисто уявна або комплексна константа і функція*

$\omega(\zeta)=z(a\zeta)$ *— розв'язок рівняння (2.11.20).*

Доказ цього простого твердження проводиться підстановкою даної лінійної заміни в рівняння Беселя (2.1.1) або користуючись теоремою 7.

При використанні дійсної константи хвильові властивості фундаментальних розв'язків рівняння Беселя зберігаються, при використанні чисто уявної константи — зникають, фундаментальний розв'язок модифікованого рівняння Беселя існує, має дійсні значення і є монотонним.

Слідство 1 є достатньо поширеним і зручним в розгляді, яке завжди приводиться до рівняння Беселя окремим випадком теореми 7.

Найбільш поширеним методом практичного приведення рівнянь одного вигляду до рівняння іншого вигляду — зокрема, приведення до класичного рівняння Беселя, є комбінація двох методів — методу приведення для базового рівняння та методу заміни змінних для рівняння Беселя.

Мета дослідження — отримати розв'язок деякого рівняння з використанням фундаментальних розв'язків рівняння Беселя — функцій Беселя, Неймана або інших добре вивчених частинних рішень.

Приведення до розв'язку, вираженого за допомогою фундаментальних розв'язків рівняння Беселя, здійснюється в два етапи — через перехід до іншого рівняння і заміну змінних. Відмітимо, що якщо заміна змінних, яку потрібно провести, дуже складна та неочевидна, то практична цінність цього приведення до рівняння Беселя або іншого рівняння є невеликою.

Зазвичай в завданнях про приведення одного диференціального рівняння до іншого відомі всі потенціали рівнянь — як початкового, так і бажаного результуючого (можливо, з точністю до числових коефіцієнтів, що входять в потенціали). Найбільш складним є визначення загального виду функцій, що входять у відношення заміни, які приводять одне рівняння до іншого.

Приведемо приклад, яким чином можна комбінувати застосування висновків теореми 6 і 7. Найпростішим випадком приведення, що розглядається в літературі, є диференціальне рівняння вигляду:

$$u''(x)-c^2u(x)=u(x)\left(p(p+1)\middle/x^2\right) \qquad (2.11.21)$$

де c, p — деякі константи.

У позначеннях теореми 6, яка застосовується на першому етапі, потенціали (2.11.2) мають вигляд:

$$Q(x)=0 \quad \text{и} \quad G(x)=-c^2-p(p+1)\big/x^2 \qquad (2.11.22)$$

Звідси $U(x)=1/2x$ й $u(x)=x^{1/2}z(x)$

Не застосовуючи другу умову теореми 6, відразу розглянемо отримане рівняння і застосуємо теорему 7 про заміну змінних до проміжного результату. Підставимо заміну змінних в отримане рівняння:

$$x^2z''(x)+xz'(x)-(c^2x^2+(p+1/2)^2)z(x)=0$$

або перепишемо його, ввівши уявну одиницю:

$$x^2z''(x)+xz'(x)+((ci)^2x^2-(p+1/2)^2)z(x)=0$$

Дане рівняння не є класичним рівнянням Беселя, але дуже близько до нього. Якщо провести лінійну заміну змінних, використовуючи комплексні числа і уявну одиницю, позначивши нову змінну

$\chi=icx$ і поклавши $\nu=p+1/2$

ми отримаємо класичне рівняння Беселя.

Загальний розв'язок рівняння (2.11.21) має вигляд:

$$u(x)=x^{1/2}Z_\nu(icx) \quad \text{где} \quad \nu=p+1/2 \qquad (2.11.23)$$

На розглянутому прикладі було показано, що для приведення деякого рівняння до рівняння Беселя використання одних формул теореми 6 і слідства 2 може виявитися недостатнім. Але теорема 6 і слідство 2 дозволяє відразу отримати загальний вид заміни, яка може виявитися неочевидною.

Заміна (2.11.10) може привести дане рівняння (2.11.2) до рівняння Беселя (достатня умова), але не забезпечує необхідні умови існування такого переходу (вона описує тільки один з можливих критеріїв). Проте в деяких випадках заміна (2.11.10) забезпечує перехід до рівняння, яке методом заміни змінних приводиться до класичного рівняння Беселя, розв'язок якого може бути виражений через циліндрові функції.

У розглянутому прикладі (2.11.21) був виконаний перехід від дійсного змінного до чисто уявного. Такі циліндрові функції розглядалися раніше у відповідних розділах. Було встановлено, що ці функції мають дійсне значення при чисто уявних значеннях змінної і не проявляють ніяких хвильових властивостей. Вони поводяться особливим чином.

Як ще один приклад приведення диференціальних рівнянь до рівняння Беселя розглянемо рівняння, які детально вивчалися Ломмелем.

Ломмелем був отриманий загальний клас рівнянь, розв'язки якого можуть бути виражені через функції Беселя, де як параметри використовуються інші функції. Розв'язок було отриманий в два етапи з використанням заміни змінних в деякому рівнянні, яке було приведено до рівняння Беселя і розв'язок якого виражається через функції Беселя.

Ломмель показав, що загальним розв'язком класу диференціальних рівнянь

$$u''(x)+Q(x)u'(x)+G(x)u(x)=0 \qquad (2.11.24)$$

де $Q(x)=(2\alpha-2\beta\nu+1)/x$

й $G(x)=(\beta^2\gamma^2x^{2\beta}+\alpha(\alpha-2\beta\nu))/x^2$

буде $u(x)=x^{\beta\nu-\alpha}Z_\nu(\gamma x^\beta)$

У приведеному прикладі Ломмелем був проведений не тільки перехід від одного диференціального рівняння до іншого, але і виконана аналітична заміна змінних в рівнянні Беселя. Ломмелем був досліджений цілий клас рівнянь з складними потенціалами, що приводяться до рівняння Беселя.

Ломмелю належать докладні результати досліджень, що описують деякий загальний клас диференціальних рівнянь.

Він встановив, що якщо $Z_\nu(x)$ — будь-який розв'язок рівняння Беселя, то наступна функція:

$$u(x)=\chi(x)\left(\psi(x)\right)^\nu Z_\nu(\psi(x)) \qquad (2.11.25)$$

є розв'язком рівняння вигляду

$$u''(x)+Q(x)u'(x)+G(x)u(x)=0 \qquad (2.11.26)$$

$$Q(x)=-\big(\psi''(x)/\psi'(x)+(2\nu-1)\psi'(x)/\psi(x)+ +2\chi'(x)/\chi(x)\big)$$

$$G(x)=\big(\psi''(x)/\psi'(x)+(2\nu-1)\psi'(x)/\psi(x)+ +2\chi'(x)/\chi(x)\big)\chi'(x)/\chi(x)- -\chi''(x)/\chi(x)+\left(\psi'(x)\right)^2$$

Ломмель вивчив цікавий окремий випадок приведення вузького, але практично часто вживаного класу диференціальних рівнянь другого порядку, що приводяться до рівняння Беселя. Виведення цих складних формул достатньо очевидне.

Для того, щоб отримати ці узагальнені рівняння, Ломмель розглянув простіше рівняння вигляду:

$$\omega''(\psi)-2p\omega'(\psi)/\psi-c^2\omega(\psi)=0 \qquad (2.11.27)$$

його розв'язок: $\omega(\psi)=\psi^{p+1/2}Z_{p+1/2}(ic\psi)$

$2p=2\nu-1$ — значення індексу

$\omega=u(\psi)/\chi(\psi)$ й $\psi=\psi(x)$ — використані заміни.

Прямою підстановкою замін, що приводяться, були отримані узагальнені формули Ломмеля (2.11.25) і (2.11.26).

Основна складність цього завдання полягає в тому, щоб визначити, чи задовольняє деяке дане диференціальне рівняння умовам Ломмеля і чи може воно бути приведено до рівняння Беселя за допомогою заміни (2.11.25), якщо ні загальний вид функцій (2.11.26), ні значення індексу ν для нього невідомі.

На сьогоднішній день це є якнайповнішим і практично цікавішим результатом приведення рівняння Беселя до деякого класу диференціальних рівнянь. Існують таблиці приведених функцій і замін.

Перетворення Ломмеля дозволяє за допомогою зручних для практичного застосування функцій представити достатньо широкий клас розв'язків практичних задач з використанням функцій Беселя.

Проте можна помітити, що перетворення Ломмеля є **окремим випадком узагальнених теорем**, які були отри-мані автором цієї роботи при дослідженні лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Дослідження можливості приведення деякого диференціального рівняння другого порядку до рівняння Беселя проводиться з двох сторін, використовуючи проміжне (буферне) диференціальне рівняння:

— використовується заміна змінних і теорема 7 для приведення рівняння Беселя до деякого рівняння, розв'язок якого виражається через функції Беселя;

— застосовується теорема 6, що приводить отримане проміжне рівняння до того рівняння, дослідження якого ми проводимо, і оцінюються критерії існування заміни.

Розгляд рівнянь Ломмеля та інших подібних окремих випадків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку демонструє основний підхід, який домінує при дослідженні питань приводимості.

Багато дослідників-математиків стикаються в своїй практичній роботі вирішення прикладних задач та побудови математичних моделей фізичних процесів з рівняннями Беселя і вивчають класи рівнянь, до яких приводяться рівняння Беселя з використанням перетворень двох типів — заміни змінних в рівнянні Беселя й можливого подальшого приведення отриманого диференціального рівняння до деякого іншого типу.

Класичним прикладом є рівняння Ломмеля й великі зведені таблиці рівнянь — окремих випадків перетворень Ломмеля для конкретних функцій заміни змінних. Приведемо декілька прикладів:

$$u''(x)+\frac{a}{x}u'(x)+\Big(b^2\exp(2cx)-d^2+\frac{a(a-2)}{4x^2}\Big)u(x)=0$$

Розв'язок $u(x)=x^{-a/2}Z_{d/c}\big(b\exp(cx)/c\big)$

$$u''(x)+\frac{2b}{2bx+c}u'(x)+\frac{b^2}{2bx+c}\Big(1-\frac{p^2}{2bx+c}\Big)u(x)=0$$

Розв'язок $u(x)=Z_p\left((2bx+c)^{1/2}\right)$ та ін.

Проте на практиці дослідники часто стикаються з деякими диференціальними рівняннями другого порядку з явними значеннями коефіцієнтів, і основною складністю є питання, чи існує заміна достатньо простого вигляду, яка дозволяє привести розв'язок цього рівняння до рівняння Беселя, використовуючи функції Беселя і елементарні функції. Займемося докладнішим і детальнішим вивченням цього зворотнього завдання, скориставшись результатами теорем 6 і 7.

Твердження 8. *Класичне рівняння Беселя*

$$x^2z''(x)+xz'(x)+(x^2-\nu^2)z(x)=0 \tag{2.1.1}$$

може бути приведено до рівняння вигляду:

$$\omega''(\zeta)+P(\zeta)\omega'(\zeta)+S(\zeta)\omega(\zeta)=0 \tag{2.11.27}$$

за допомогою заміни змінних вигляду:

$$x=\psi(\zeta) \qquad \omega(\zeta)=z(\psi(\zeta)) \tag{2.11.17}$$

$$P(\zeta)=\psi'(\zeta)/\psi(\zeta)-\psi''(\zeta)/\psi'(\zeta) \tag{2.11.28}$$

$$S(\zeta)=\left(1-\nu^2/\psi(\zeta)^2\right)\psi'(\zeta)^2 \tag{2.11.29}$$

Для доказу твердження 8 досить покласти в теоремі 7 значень потенціалів:

$$E(x)=1/x \quad \text{и} \quad H(x)=(x^2-\nu^2)/x^2$$

Якщо нам потрібно перевірити, чи приводиться довільне рівняння (2.11.27) до рівняння Беселя методом заміни змінних, ми повинні встановити існування деякої заміни (2.11.17) і виконання умов (2.11.28):

$$P(\zeta)=\psi'(\zeta)/\psi(\zeta)-\psi''(\zeta)/\psi'(\zeta) \tag{2.11.28}$$

Перетворимо обидві частини отриманого рівняння:

$$dP(\zeta)=\frac{d\psi(\zeta)}{\psi(\zeta)}-\frac{d\psi'(\zeta)}{\psi'(\zeta)}$$

Формально проінтегруємо отримане рівняння:

$$\psi'(\zeta)/\psi(\zeta)=\exp\Big(-\int^{\zeta}P(\eta)d\eta\Big)$$

Якщо для зручності ми введемо функцію $\varphi(\zeta)$:

$$\varphi(\zeta)=\exp\Big(-\int^{\zeta}P(\eta)d\eta\Big) \tag{2.11.30}$$

$$P(\zeta)=-\varphi'(\zeta)/\varphi(\zeta)$$

тоді можна записати $\psi'(\zeta)/\psi(\zeta)=\varphi(\zeta)$

Звідси з урахуванням константи можна виразити:

$$\psi(\zeta)=\boldsymbol{c}\exp\left(\int^{\zeta}\varphi(\xi)d\xi\right) \quad \text{або детальніше}$$

$$\psi(\zeta)=\boldsymbol{c}\exp\left(\int^{\zeta}\left(\exp\left(-\int^{\xi}P(\eta)d\eta\right)\right)d\xi\right) \tag{2.11.31}$$

Таким чином, двічі проінтегрувавши і застосувавши експоненту до потенціалу, що стоїть при першій похідній початкового рівняння, ми знайдемо явний вид заміни, яка може привести до рівняння Беселя. Отримана умова (2.11.31) є необхідною, але не достатньою.

Очевидно, що для будь-якої формально інтегрованої функції потенціалу можна обчислити значення (2.11.31) і отримати деяку заміну змінних. Перевіримо відповідність потенціалу при нульовій похідній:

$$S(\zeta)=\left(1-\nu^2/\psi(\zeta)^2\right)\psi'(\zeta)^2 \tag{2.11.29}$$

$$S(\zeta)=\psi'(\zeta)^2-\nu^2\left(\psi'(\zeta)/\psi(\zeta)\right)^2$$

$$S(\zeta)=\psi'(\zeta)^2-\nu^2\varphi(\zeta)^2 \tag{2.11.32}$$

Якщо можна підібрати таке значення індексу, при якому відношення (2.11.32) виконуватиметься тотожно, то деяке рівняння (2.11.27) може бути приведене до рівняння Беселя методом заміни змінних.

Твердження 9. *Деяке рівняння вигляду*

$$\omega''(\zeta)+P(\zeta)\omega'(\zeta)+S(\zeta)\omega(\zeta)=0 \tag{2.11.27}$$

за допомогою заміни змінних вигляду:

$$x^2z''(x)+xz'(x)+(x^2-\nu^2)z(x)=0 \tag{2.1.1}$$

може бути приведено до рівняння Беселя:

$$x=\psi(\zeta) \qquad \omega(\zeta)=z(\psi(\zeta)) \tag{2.11.17}$$

$$\psi(\zeta)=\boldsymbol{c}\exp\left(\int^{\zeta}\left(\exp\left(-\int^{\xi}P(\eta)d\eta\right)\right)d\xi\right) \tag{2.11.31}$$

якщо виконується тотожність:

$$S(\zeta)=\psi'(\zeta)^2-\nu^2\left(\psi'(\zeta)/\psi(\zeta)\right)^2 \tag{2.11.29}$$

для деяких констант ν й $\boldsymbol{c}$, які можуть бути отримані методом невизначених коефіцієнтів, явною підстановкою або іншими методами.

Примітка. Невизначена константа $\boldsymbol{c}$ виникає завдяки формальному інтегруванню і загальному виду потенціалу (2.11.28), який може бути явно виражений через функцію заміни. Константа може дорівнювати одиниці або приймати інше ненульове значення.

Якщо ми покладемо потенціал $P(\zeta)=1/\zeta$
тоді заміна (2.11.31) матиме загальний вигляд:

$x=\psi(\zeta)=c\zeta$ де c — деяка константа.

Для існування приведення методом заміни змінних необхідно додатково вимагати виконання критерію приводимості (2.11.29):

$S(\zeta)=c^2-\nu^2/\zeta^2$ — загальний вид потенціалу.

Отримані виводи повністю співпадають з результатами слідства 1 теореми 7. Ми довели, за яких умов можливе приведення до рівняння Беселя рівняння з одним конкретно заданим потенціалом і який вигляд повинен мати другий потенціал цього рівняння.

Підведемо проміжні підсумки. Ми отримали критерії — теорему 6 і теорему 7, які двома різними способами дозволяють виконувати приведення одних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку до інших диференціальних рівнянь того ж типу.

Коли ми досліджуємо можливість приведення одного рівняння до іншого, спочатку ми повинні спробувати окремо застосувати теорему 8 і окремо — теорему 7. В деяких випадках використання цих теорем вже дозволяє отримати задовільний результат.

Окремим випадком є питання приведення рівнянь до рівняння Беселя. Для цього можна скористатися окремими випадками — слідством 2 теореми 6 і следствами теореми 6 — твердженнями 8 і 9.

Для того, щоб отримати складніші способи приведення двох рівнянь, послідовно застосовуватимемо теорему 6 і теорему 7, використовуючи третє диференціальне рівняння як «посередник» між двома досліджуваними рівняннями.

Нехай нам відомий розв'язок рівняння:

$$z''(x)+E(x)z'(x)+H(x)z(x)=0 \qquad (2.11.6)$$

Досліджуємо можливість комбінованого приведення до нього іншого рівняння вигляду:

$$u''(\zeta)+V(\zeta)u'(\zeta)+K(\zeta)u(\zeta)=0 \qquad (2.11.33)$$

Як «посередник» розглянемо рівняння:

$$\omega''(\zeta)+P(\zeta)\omega'(\zeta)+S(\zeta)\omega(\zeta)=0 \qquad (2.11.27)$$

Нам відомі потенціали $E(x)$, $H(x)$ і деякий загальний розв'язок $z(x)$ рівняння (2.11.33). Потенціали рівняння - «посередника» заздалегідь невідомі. Потрібно виразити розв'язок $u(\zeta)$ рівняння (2.11.33) через x і $z(x)$ й оцінити критерії існування такої заміни.

Необхідною умовою приведення рівняння (2.11.33) до деякого рівняння-«посередника» (2.11.27)

$$u''(\zeta)+V(\zeta)u'(\zeta)+K(\zeta)u(\zeta)=0 \qquad (2.11.33)$$

$$\omega''(\zeta)+P(\zeta)\omega'(\zeta)+S(\zeta)\omega(\zeta)=0 \qquad (2.11.27)$$

згідно умовам теореми 6 є заміна вигляду:

$$\omega(\zeta)=\exp\left(\int^{\zeta} U(\xi)d\xi\right)u(\zeta) \qquad (2.11.34)$$

де $U(\zeta)=\left(V(\zeta)-P(\zeta)\right)/2$

Необхідною умовою приведення іншого рівняння (2.11.6) до деякого рівняння -«посередника»

$$z''(x)+E(x)z'(x)+H(x)z(x)=0 \qquad (2.11.6)$$

$$\omega''(\zeta)+P(\zeta)\omega'(\zeta)+S(\zeta)\omega(\zeta)=0 \qquad (2.11.27)$$

згідно умовам теореми 7 є заміна вигляд:

$$x=\psi(\zeta) \qquad z(x)=z(\psi(\zeta))=\omega(\zeta) \qquad (2.11.17)$$

$$P(\zeta)=E(\psi(\zeta))\psi'(\zeta)-\psi''(\zeta)/\psi'(\zeta) \qquad (2.11.18)$$

$$S(\zeta)=H(\psi(\zeta))\left(\psi'(\zeta)\right)^2 \qquad (2.11.19)$$

Можна відзначити, що в даних міркуваннях необхідними умовами приведення рівнянь один до одного є потенціали при перших похідних двох даних рівнянь і можливість існування між ними залежності.

Підставивши в рівняння (2.11.18) явне значення відомого потенціалу $E(x)$ми отримаємо диференціальне рівняння, що явно зв'язує $\psi(\zeta)$ й $P(\zeta)$.

Для того, щоб між потенціалами $P(\zeta)$ й $V(\xi)$ існувала залежність, тотожно повинен виконуватися критерій теореми 6:

$$U'(\zeta)+U_2(\zeta)+P(\zeta)U(\zeta)=K(\zeta)-S(\zeta) \qquad (2.11.34)$$

Дослідження достатніх умов забезпечується потенціалами при нульових похідних функцій.

Якщо дослідникові вдасться знайти розв'язок отриманої системи рівнянь, що пов'язує потенціали двох відомих рівнянь між собою, знайти невідому функцію заміни змінних, і цей загальний розв'язок буде представлено через елементарні функції, то завдання приведення двох рівнянь один до одного можна вважати вирішеним.

Загальний вид отриманої системи диференціальних рівнянь може наштовхнути дослідника на думку, якого типу функції можна використовувати для взаємних перетворень і далі накласти умови, застосувавши метод невизначених коефіцієнтів або інший.

Розв'язком рівняння (2.11.27) є функція:

$\omega(\zeta)=z(\psi(\zeta))$, де функція $z(x)$ відома.

Розв'язком рівняння (2.11.33) є функція:

$$u(\zeta)=\exp\left(-\int^{\zeta} U(\xi)d\xi\right)z(\psi(\zeta)) \qquad (2.11.35)$$

Послідовне виконання двох розглянутих перетворень дає залежність загального вигляду:

$$u(x)=A(x)z(\psi(x)) \tag{2.11.36}$$

де $\psi(x)$ й $A(x)$ — невідомі функції

для деякої пари диференціальних рівнянь:

$$z''(x)+E(x)z'(x)+H(x)z(x)=0 \tag{2.11.6}$$

$$u''(x)+V(x)u'(x)+K(x)u(x)=0 \tag{2.11.33}$$

$z(x)$ — відомий розв'язок деякого рівняння.

Якщо в попередньому розгляді ми поміняємо черговість застосування теорем 6 і 7, ми отримаємо деяку залежність загального вигляду, що отримується в два етапи:

$$u(x)=B(\psi(x))z(\psi(x)) \tag{2.11.37}$$

Найбільш складним, але практично ще здійсненним способом приведення диференціальних рівнянь один до одного є використання двох рівнянь-посередників. Кожне з даних рівнянь спочатку приводиться до деякої пари диференціальних рівнянь за допомогою теореми 6, і вже потім між ними встановлюється залежність методом заміни змінних по теоремі 7.

Ми отримаємо систему з п'яти диференціальних рівнянь з п'ятьма невідомими функціями. Якщо система вирішується в елементарних функціях — завдання приведення диференціальних рівнянь можна вважати вирішеним.

$$u(x)=A(x)B(\psi(x))z(\psi(x)) \tag{2.11.38}$$

Примітка. Якщо застосовувати теореми 6 і 7, використовуючи метод математичної індукції, ці теореми потрібно чергувати один з одним. Послідовне використання умов однієї і тієї ж теореми часто не має сенсу.

Виключенням є приведення до диференціального рів-няння з нульовим потенціалом при першій похідній, оскільки до нього єдиним чином приводиться будь-яке диференціальне рівняння даного типу. У інших випадках додаткові приведення не виправдані на практиці.

Перейдемо від абстрактних міркувань, метою яких є проведення загальної систематизації питань приведення рівнянь, до розгляду конкретного рівняння Беселя та інших неочевидних диференціальних рівнянь, що приводяться до нього. Розглянемо окремий випадок.

Лема 4. *Диференціальне рівняння вигляду:*

$$y''(x)+g(x)y(x)=0 \tag{2.11.39}$$

може бути приведено до рівняння Беселя

$$z''(x)+E(x)z'(x)+H(x)z(x)=0 \tag{2.11.6}$$

$$E(x)=1/x \qquad \textit{й} \qquad H(x)=(x^2-\nu^2)/x^2$$

за допомогою узагальненої заміни вигляду:

$$y(x)=\exp\left(\int^x P(\xi)/2\, d\xi\right) z(\psi(x)) \tag{2.11.40}$$

где $P(x)=\psi'(x)/\psi(x)-\psi''(x)/\psi'(x)$

якщо існує функція $\psi(x)$, *яка задовольняє диференціальному рівнянню:*

$$g(x)=\psi'(x)^2+\left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right)^2\left(\frac{1}{4}-\nu^2\right)-$$
$$-\frac{3}{4}\left(\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)}\right)^2+\frac{\psi'''(x)}{2\psi'(x)} \tag{2.11.41}$$

Практичне значення лема 4 має тільки в тому випадку, якщо функція $\psi(x)$ *існує, може бути виражена через елементарні функції і має достатньо простій вигляд. Якщо простий розв'язок* $\psi(x)$ *існує, на практиці він може бути отриманий методом невизначених коефіцієнтів.*

Примітка. Щоб зробити завдання пошуку розв'язків реальним і виключити один потенціал при першій похідній, ми привели досліджуване на приводимість рівняння до вигляду (2.11.39) на підставі слідства 4 теореми 6.

Доказ. Застосуємо заміну змінних до рівняння Беселя і далі приведемо отримане рівняння до деякого рівняння з нульовим потенціалом при першій похідній. Будь-які диференціальні рівняння даного типу можуть бути приведені до рівняння Штурма-Ліувіля єдиним чином. Прирівнявши один одному потенціали в цьому рівнянні, ми отримаємо критерій приводимості двох диференціальних рівнянь.

Деяке диференціальне рівняння вигляду

$$\omega''(\zeta)+P(\zeta)\omega'(\zeta)+S(\zeta)\omega(\zeta)=0 \tag{2.11.27}$$

приводиться до рівняння Беселя за допомогою заміни змінних за умови:

$$x=\psi(\zeta) \qquad \omega(\zeta)=z(\psi(\zeta)) \tag{2.11.17}$$

$$P(\zeta)=\psi'(\zeta)/\psi(\zeta)-\psi''(\zeta)/\psi'(\zeta) \tag{2.11.28}$$

$$S(\zeta)=\psi'(\zeta)^2\left(1-\nu^2/\psi(\zeta)^2\right) \tag{2.11.29}$$

Отримане рівняння (2.11.27) приводиться до рівняння Штурма-Ліувілля за допомогою наступної заміни:

$$y''(\zeta)+q(\zeta)y(\zeta)=0 \tag{2.11.39}$$

$$y(\zeta)=\exp\left(\int^{\zeta} P(\xi)/2\ d\xi\right)\omega(\zeta)$$

де $g(\zeta)=S(\zeta)-P'(\zeta)/2-P^2(\zeta)/4$ (2.11.40)

Підставивши значення потенціалів, виражених через функцію заміни (2.11.28) і (2.11.29), в результуюче рівняння (2.11.40) і спростивши, ми отримаємо диференціальне рівняння — критерій приводимості та існування заміни даного типу. ***Лема доведена.***

Теорема 8. *Диференціальне рівняння вигляду:*

$$u''(x)+V(x)u'(x)+K(x)u(x)=0 \tag{2.11.33}$$

може бути приведено до рівняння Беселя

$$z''(x)+E(x)z'(x)+H(x)z(x)=0 \tag{2.11.6}$$

$$E(x)=1/x \quad \text{й} \quad H(x)=(x^2-\nu^2)/x^2$$

за допомогою узагальненої заміни: (2.11.41)

$$u(x)=\exp\left(\int^{x}\left(P(\xi)-V(x)\right)/2\ d\xi\right)z(\psi(x))$$

де $P(x)=\psi'(x)/\psi(x)-\psi''(x)/\psi'(x)$

якщо існує функція $\psi(x)$*, яка задовольняє диференціальному рівнянню:*

$$K(x)-V'(x)/2-V^2(x)/4 = \psi'(x)^2+ \tag{2.11.42}$$

$$+\left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right)^2\left(\frac{1}{4}-\nu^2\right)-\frac{3}{4}\left(\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)}\right)^2+\frac{\psi'''(x)}{2\psi'(x)}$$

Практичне значення *теорема 8 має тільки в тому випадку, якщо функція* $\psi(x)$ *існує, може бути виражена через елементарні функції і має достатньо простий вигляд. Якщо простий розв'язок* $\psi(x)$ *існує, на практиці він може бути отриманий методом невизначених коефіцієнтів.*

Для доведення теореми 8 ми привели загальне рівняння (2.11.33) до рівняння Штурма-Ліувіля і застосували лему 4, скориставшись слідством 3 теореми 6.

Як приклад, що демонструє зручність пропонованого методу, розглянемо застосування леми 4 і теореми 8 до рівняння простого вигляду, розв'язок якого неочевидно, і приведемо його до рівняння Беселя:

$$y''(x)+x\,y(x)=0$$

$g(x)=x$ використовуємо позначення леми 4

Із загального виду відношення (2.11.41) для даного випадку можна припустити, що розв'язком диференціального рівняння (2.11.41) буде степенева функція, яку ми шукатимемо методом невизначених коефіцієнтів у вигляді:

$$\psi(x)=h\,x^s$$

Підставимо передбачуване значення функції в рівняння з леми 4 і отримаємо відношення:

$$P(x)=\psi'(x)/\psi(x)-\psi''(x)/\psi'(x) \tag{2.11.28}$$

$$S(x)=\psi'(x)^2\left(1-\nu^2/\psi(x)^2\right) \tag{2.11.29}$$

$$g(x)=S(x)-P'(x)/2-P^2(x)/4 \tag{2.11.40}$$

Звідси отримуємо:

$$P(x)=1/x$$

$$S(x)=h^2 s^2 x^{2s-2}\left(1-\nu^2/(h^2 x^{2s})\right)$$

$$g(x)=x=h^2 s^2 x^{2s-2}\left(1-\nu^2/(h^2 x^{2s})\right)+1/4x^2$$

Перетворимо і спростимо:

$$x = h^2 s^2 x^{2s-2}-\nu^2 s^2/x^2+1/4x^2$$

Очевидно, що відношення прийме вид тотожності, якщо вимагати тотожної відповідності коефіцієнтів при ступенях і рівність ступенів змінною:

$$1=2s-2 \qquad 1=hs \qquad 1/4=\nu^2 s^2$$

Звідси набуваємо наступних значень:

$$s=3/2 \qquad h=2/3 \qquad \nu=1/3$$

Таким чином, розв'язком рівняння буде:

$$y''(x)+x\,y(x)=0$$

$$y(x)=x^{1/2}\,Z_{1/3}(2/3\;x^{3/2})$$

Ми отримали розв'язок неочевидного рівняння, вираженого через функції Беселя і елементарні функції. Такий же результат можна отримати, відразу підставивши значення функції заміни з невідомими коефіцієнтами в диференціальне рівняння (2.11.41). Результат повністю співпадає з табличними даними.

Перевага використанного методу і запропонованої теореми 8 очевидна — якщо простий розв'язок задачі приведення існує, він може бути отриманий розв'язком деякого диференціального рівняння (2.11.41) методом невизначених коефіцієнтів.

Розглянутий приклад є окремим випадком диференціальних рівнянь вигляду:

$$u''(x)+ax^{-2}u'(x)+bx\,u(x)=0$$

Використовуємо заміну $\psi(x)=h\,x^s \quad P(x)=1/x$

Приведемо рівняння до рівняння Штурма-Ліувіля

$$y''(x)+g(x)y(x)=0$$

$$g(x)=bx+a(2-a)/4x^2$$

$$u(x)=\exp\left(-\int^x a\xi^{-2}/2\;d\xi\right)y(x)=c\,\exp(a/x)y(x)$$

$$y(x)=\exp\left(\int^x P(\xi)/2\;d\xi\right)z(\psi(x))=x^{1/2}z(\psi(x))$$

$$g(x)=h^2 s^2 x^{2s-2}\left(1-\nu^2/(h^2 x^{2s})\right)+1/4x^2$$

Очевидно, що потенціал $g(x)$ прийме вид тотожності, якщо вимагати тотожної відповідності коефіцієнтів при ступенях і рівність ступенів змінною:

$$1=2s-2 \qquad b=h^2 s^2 \qquad 2a-a^2=1-6\nu^2$$

Звідси набуваємо наступних значень:

$$s=3/2 \qquad h=2/3\;b^{1/2} \qquad \nu=|a-1|/3\geqslant 0$$

Таким чином, розв'язком рівняння буде:

$$u''(x)+ax^{-2}u'(x)+bx\,u(x)=0$$

$$u(x)=\exp(a/x)\,x^{1/2}\,Z_\nu\,(2/3\;b^{1/2}\,x^{3/2})$$

де індекс рівняння Беселя $\nu=|a-1|/3\geqslant 0$

Таким чином, ми послідовно розглянули декілька критеріїв, за якими диференціальні рівняння другого порядку можуть або не можуть бути приведені до рівняння Беселя, — критерії теореми 6, 7 і 8.

Вони виходять із загального виду потенціалів рівняння, яке досліджується на приводимість до рівняння Беселя.

Наступним варіантом, який приводить деяке диференціальне рівняння до рівняння Штурма-Ліувіля і який використовує його розв’язок, є заміна вигляду:

$$\omega(\zeta)=B(\psi(\zeta))\,z(\psi(\zeta)) \qquad (2.11.37)$$

використовуючий ланцюжок рівнянь:

$$z''(x)+E(x)z'(x)+H(x)z(x)=0 \qquad (2.11.6)$$

$$u''(x)+Q(x)u'(x)+G(x)u(x)=0 \qquad (2.11.2)$$

$$\omega''(\zeta)+P(\zeta)\omega'(\zeta)+S(\zeta)\omega(\zeta)=0 \qquad (2.11.27)$$

із значеннями потенціалів:

$$E(x)=1/x \quad \text{й} \quad H(x)=(x^2-\nu^2)/x^2$$

За теоремою 6 використовуємо перетворення

$$u(x)=\exp\left(\int^x U(\xi)d\xi\right)z(x) \qquad (2.11.3)$$

де $U(x)=\left(E(x)-Q(x)\right)/2$ (2.11.4)

$$U'(x)+U^2(x)+Q(x)U(x)=H(x)-G(x) \qquad (2.11.5)$$

Підставимо потенціали в рівняння і отримаємо:

$$u(x)=x^{1/2}\exp\left(\int^x -Q(x)/2\ d\xi\right)z(x)$$

$$G(x)=(x^2-\nu^2)/x^2+\left(Q'(x)+Q(x)/x\right)/2$$

Далі використаємо заміну змінних. Застосуємо теорему 7 про заміну змінних в рівняннях:

$$x=\psi(\zeta) \qquad z(x)=z(\psi(\zeta))=\omega(\zeta) \qquad (2.11.17)$$

$$P(\zeta)=Q(\psi(\zeta))\psi'(\zeta)-\psi''(\zeta)/\psi'(\zeta) \qquad (2.11.18)$$

$$S(\zeta)=G(\psi(\zeta))\left(\psi'(\zeta)\right)^2 \qquad (2.11.19)$$

У практичних завданнях нам відомі потенціали $P(\zeta)$ й $S(\zeta)$ і необхідно виконати зворотній перехід до рівняння Беселя. Потенціали двох рівнянь підряд в системі не визначені та зворотнє завдання скрутне.

Проте ми можемо розглядати заміну (2.11.37) в елементарних або інших функціях та вивчати класи рівнянь, до яких приводить та чи інша заміна.

Лема 5. *Диференціальне рівняння вигляду:*

$$\omega''(x)+P(x)\omega'(x)+S(x)\omega(x)=0 \qquad (2.11.27)$$

може бути приведено до рівняння Беселя

$$z''(x)+E(x)z'(x)+H(x)z(x)=0 \qquad (2.11.6)$$

$$E(x)=1/x \quad \text{и} \quad H(x)=(x^2-\nu^2)/x^2$$

за допомогою функції заміни $\psi(x)$ вигляду:

$$\omega(x)=\psi(x)^{a}z(\psi(x)) \qquad (2.11.38)$$

якщо можна підібрати заміну, що задовольняє

$$P(x)=(1-2a)\psi'(x)/\psi(x)-\psi''(x)/\psi'(x) \qquad (2.11.39)$$

$$S(x)=\left(\psi'(x)\right)^2\left(1-(\nu^2-a^2)/\psi(x)^2\right) \qquad (2.11.40)$$

Для доказу леми досить розглянути, до якого рівняння по теоремі 6 буде приведено рівняння Беселя за допомогою степеневої функції заміни (2.11.37):

$$B(x)=x^{a} \quad \text{де} \quad u(x)=x^{a}z(x)$$

$$u''(x)+Q(x)u'(x)+G(x)u(x)=0 \qquad (2.11.2)$$

Використання загального виду заміни приведе до таких значень потенціалів нового рівняння:

$U(x)=a/x$ — потенціал заміни з теореми 6

$$Q(x)=(1-2a)/x \quad \text{й} \quad G(x)=\left(1-(\nu^2-a^2)/x^2\right)$$

Потім застосуємо теорему 7 про заміну змінних і замінимо змінну x на деяку функцію $\psi(x)$. Це дає необхідні відношення (2.11.39) і (2.11.40). Лема 5 має практичне значення тільки в тому випадку, якщо функція заміни досить проста і може бути виражена через елементарні функції.

Розглянемо як приклад застосування леми 5 деяке диференціальне рівняння загального вигляду:

$$\omega''(x)+P(x)\omega'(x)+S(x)\omega(x)=0 \tag{2.11.41}$$

де $P(x)=\gamma/x$ й $S(x)=\alpha x^{\beta}$ (2.11.42)

Виходячи із загального виду рівнянь (2.11.39) і (2.11.40), можна припустити, що функція заміни може бути знайдена методом невизначених коефіцієнтів як елементарна степенева функція:

$\psi(x)=cx^{b}$ де b й c — невідомі.

Підставимо функцію заміни в рівняння (2.11.39) і (2.11.40), скоротимо і отримаємо відношення:

$$\gamma=1-2ab$$

$$\alpha x^{\beta}=b^2c^2x^{2b-2}\left(1-(\nu^2-a^2)/(cx^{b})^2\right)$$

Очевидно, що потрібно додатково вимагати:

$$\beta=2b-2 \qquad \alpha=b^2c^2 \qquad \nu=a$$

Звідси $b=(\beta+2)/2 \qquad c=2\alpha^{1/2}/(\beta+2)$

$$a=\nu=(1-\gamma)/(\beta+2)$$

Таким чином, з точністю до константи розв'язок рівняння (2.11.41) можна виразити через наступний загальний розв'язок класичного рівняння Беселя:

$$\omega(x)=x^{ba}\,Z_{\nu}(cx^{b})$$

Ми показали метод, яким можна досліджувати диференціальні рівняння на можливість приведення їх до рівняння Беселя з використанням простих функцій замін відповідно до теорем 6 і 7.

Для доказу леми 5 ми розглянули конкретну функцію заміни — просту степеневу функцію. Замість неї можна використовувати будь-які елементарні функції й таким чином визначати нові критерії приводимості класів диференціальних рівнянь. Проте можна відзначити наступне.

При рішенні конкретної задачі (2.11.42) цей розв'язок ми могли б отримати, безпосередньо використовуючи лінійну заміну теореми 8. Фактично, лема 5 і вся загальна заміна вигляду (2.11.37) виявилися окремим випадком теореми 8.

Найбільш складним, хоча практично ще застосовним методом, є використання заміни вигляду:

$$u(x)=A(x)B(\psi(x))z(\psi(x)) \tag{2.11.38}$$

Зокрема, Ломмель при дослідженні загальних розв'язків рівнянь (2.11.26) використовував на практиці окремий випадок заміни (2.11.25) саме такого вигляду. Він використовував окремий випадок (2.11.38) і отримав широкий клас диференціальних рівнянь, що приводяться до рівняння Беселя.

На практиці при рішенні задачі приведення диференціальних рівнянь до класичного рівняння Беселя використання ускладнених критеріїв (2.11.38) є незручним. Більш того, використана Ломмелем заміна вигляду (2.11.38) також може розглядатися як окремий випадок теореми 8 про існування лінійної заміни.

Всі розглянуті заміни на практиці є окремими випадками теореми 8 і узагальненої заміни:

$$u(x)=A(x)\,z(\psi(x)) \tag{2.11.36}$$

Це пов'язано з тим, що послідовне застосування до одного диференціального рівняння двох чи більше за замін теореми 6 про приводимість рівнянь еквівалентно одноразовому застосуванню умов цієї ж теореми та існуванню узагальнювальної заміни. Послідовне застосування теореми 7 про заміну змінних також еквівалентно одноразовому застосуванню умов цієї теореми. Для лінійних диференціальних рівнянь і теорем 6 і 7 строго виконується закон транзитивності.

Це доводить той факт, що лінійна заміна теореми 8 є узагальненим випадком лінійної заміни і охоплює всі інші окремі випадки (зокрема достатньо складного вигляду), що використовуються на практиці.

Достоїнства методу прямого застосування теорем 6, 7 і 8 про приводимість диференціальних рівнянь один до одного очевидні. В цьому випадку завдання приведення зводиться до розв'язок деяких диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів.

§ 12. Підсумкові результати розділу

Підсумуємо результати, отримані в цьому розділі. Ми вивчали основні властивості фундаментальних розв'язків рівняння Беселя — циліндрових функцій.

$$x^2 z''(x) + x z'(x) + (x^2 - \nu^2) z(x) = 0 \tag{2.1.1}$$

де ν — деяка константа (можна вважати, що ця константа ненегативна $\nu \geqslant 0$), а $y(x)$ — функція.

Рівняння Беселя також записується у формі:

$$z''(x) + \frac{1}{x} z'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) z(x) = 0 \tag{2.1.2}$$

Класичне рівняння Беселя може бути приведене до рівняння Штурма-Ліувіля:

$$y_\nu''(x) - \frac{(\nu - 1/2)(\nu + 1/2)}{x^2} y_\nu(x) = -y_\nu(x) \tag{2.1.5}$$

за допомогою заміни: $$y_\nu(x) = \sqrt{x} J_\nu(x) \tag{2.1.6}$$

Для класичних розв'язків рівняння Беселя існують рекурентні відношення вигляду:

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_\nu'(x) \tag{2.1.12}$$

$$J_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J_\nu'(x) \tag{2.1.13}$$

Отримані рекурентні відношення дозволяють виписати ще одну пару рекурентних відношень, пов'язуючі три функції Беселя:

$$2 J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) \tag{2.1.28}$$

$$J_{\nu-1}(x) - 2\frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu+1}(x) = 0 \tag{2.1.29}$$

Для розв'язків класичного рівняння Беселя існують інтегральні форми рекурентних відношень:

$$J_\nu(x) = -\int^{x} \frac{x^\nu}{\xi^\nu} J_{\nu+1}(\xi)\, d\xi \tag{2.2.11}$$

Обмежені в нулі функції Беселя з напівцілим індексом виражаються через елементарні функції за допомогою кінцевого ряду:

$$J_{n+1/2}(x) = (-1)^n x^{n+1/2} \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n \frac{\sin x}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{2.2.23}$$

Асимптотична поведінка цих функцій:

$$J_{n+1/2}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(-1)^n}{x^{1/2}} \frac{d^n}{dx^n} \sin x \tag{2.3.7}$$

Необмежені в нулі функції Беселя з напівцілим індексом виражаються через елементарні функції:

$$J_{-n-1/2}(x) = x^{n+1/2} \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n \frac{\cos x}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{2.4.10}$$

При цілих значеннях індексу розв'язок рівняння Беселя може бути отриманий розкладенням в ряд:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k!\,(n+k)!} \quad \text{при} \quad n \geqslant 0 \tag{2.5.8}$$

При нецілих значеннях індексу існують два частинні лінійно-незалежні розв'язки рівняння Беселя:

$$J_{\mp\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\mp\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(\mp\nu + k + 1)} \quad \nu \geqslant 0 \tag{2.5.9}$$

Щоб отримати два лінійно-незалежні розв'язки рівняння Беселя при всіх значеннях індексу, були введені функції Неймана.

Необмежені в нулі функції Неймана задовольняють наступному відношенню:

$$\mathcal{N}_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \text{ для } \nu \geqslant 0 \qquad (2.6.1)$$

Корені розв'язків рівняння Беселя, окрім можливо нуля, є простими. Корені послідовних розв'язків рівняння Беселя перемежається один з одним. Корені двох лінійно-незалежних розв'язків рівняння Беселя, що мають однаковий індекс, перемежається один з одним.

До класичного рівняння Беселя приводиться диференціальне рівняння вигляду:

$$u''(x) + Q(x)u'(x) + G(x)u(x) = 0 \qquad (2.11.2)$$

з використанням аналітичної заміни вигляду:

$$u(x) = \exp\Big(\int^{x} U(\xi)\,d\xi\Big)\, z(x) \qquad (2.11.10)$$

де $U(x) = \big(1/x - Q(x)\big)\big/2$ (2.11.11)

$$U'(x) + U^2(x) + Q(x)U(x) = \big(1 - \nu^2/x^2\big) - G(x)$$

Деяке диференціальне рівняння вигляду:

$$\omega''(\zeta) + P(\zeta)\omega'(\zeta) + S(\zeta)\omega(\zeta) = 0 \qquad (2.11.27)$$

може бути приведено до рівняння Беселя за допомогою заміни змінних вигляду:

$$x = \psi(\zeta) \qquad \omega(\zeta) = z(\psi(\zeta)) \qquad (2.11.17)$$

$$\psi(\zeta) = c\,\exp\Big(\int^{\zeta}\Big(\exp\Big(-\int^{\xi} P(\eta)\,d\eta\Big)\Big)\,d\xi\Big) \qquad (2.11.31)$$

$$S(\zeta) = \psi'(\zeta)^2 - \nu^2\big(\psi'(\zeta)/\psi(\zeta)\big)^2 \qquad (2.11.29)$$

Для отримання узагальненої заміни і приведення диференціального рівняння до рівняння Беселя необхідно послідовно застосувати дві ці теореми.

Диференціальне рівняння вигляду:

$$u''(x) + V(x)u'(x) + K(x)u(x) = 0 \qquad (2.11.33)$$

може бути приведено до рівняння Беселя за допомогою узагальненої заміни вигляду:

$$u(x) = \exp\Big(\int^{x}\big(P(\xi) - V(x)\big)/2\ d\xi\Big)\, z(\psi(x))$$

де $P(x) = \psi'(x)/\psi(x) - \psi''(x)/\psi'(x)$

якщо існує функція $\psi(x)$, яка задовольняє диференціальному рівнянню:

$$K(x) - V'(x)/2 - V^2(x)/4 = \psi'(x)^2 + \qquad (2.11.42)$$

$$+\Big(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\Big)^2\Big(\frac{1}{4} - \nu^2\Big) - \frac{3}{4}\Big(\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)}\Big)^2 + \frac{\psi'''(x)}{2\psi'(x)}$$

Практичне значення теорема має в тому випадку, якщо функція $\psi(x)$ існує, може бути виражена через елементарні функції та має простій вигляд. Якщо простий розв'язок $\psi(x)$ існує, на практиці він може бути отриманий методом невизначених коефіцієнтів.

Узагальнена заміна має загальний вигляд:

$$u(x) = A(x)\, z(\psi(x)) \qquad (2.11.36)$$

Рекурентні відношення для розв'язків класичного рівняння Беселя були отримані безпосередньо, з використанням методу рекурентних відношень, виходячи тільки із загального виду потенціалів рівняння Беселя.

Приведення однорідних диференціальних рівнянь до рівняння Беселя і представлення їх розв'язків за допомогою загального розв'язку рівняння Беселя виходить тільки із загального виду потенціалів рівняння, що приводиться.

Активно використовувалося рівняння Штурма-Ліувіля, до якого рівняння Беселя приводиться єдиним чином — для отримання рекурентних відношень, асимптотичних розкладень, вивчення поведінки нулів розв'язків рівняння Беселя і отримання формул приведення диференціальних рівнянь до рівняння Беселя.

Розділ III
Інші аспекти рівнянь Беселя і циліндрових функцій

§ 1. Приведення диференціальних рівнянь старших порядків до рівняння Беселя

У попередньому розділі детально вивчалися загальні властивості розв'язків рівняння Беселя — функцій Беселя, Неймана або інших спеціальних (циліндрових) функцій і розглядалися питання приводимості до лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Вона розрахована на широку аудиторію, що має базову підготовку.

Для осіб, які використовують функції Беселя і Неймана для розв'язків практичних задач і хочуть докладніше дізнатися про особливості їх поведінки і найбільш типових їх властивостях, попередній розділ надає вичерпну інформацію.

Подальші розділи розраховані на осіб, що займаються поглибленим вивченням вищої математики, математичної фізики і теорії спеціальних функцій, і можуть представляти деякі ускладнення для неспеціалістів.

Приведемо результат, належний Ломмелю. Розглянемо новий узагальнений диференціальний оператор:

$$\mathcal{D} f(x) = \left(x \frac{d}{dx}\right) f(x) \tag{3.1.1}$$

Розглянуте в попередньому розділі диференціальне рівняння (2.11.24), що приводиться до рівняння Беселя, з використанням оператора (3.1.1) може бути записано:

$$(\mathcal{D}+\alpha)(\mathcal{D}+\alpha-2\beta\nu)u(x)+\beta^2\gamma^2 x^{2\beta} u(x)=0$$

його розв'язок $u(x)=x^{\beta\nu-\alpha} Z_\nu(\gamma x^\beta)$

Ломмель і Ватсон узагальнили отримане рівняння, отримавши розв'язок цілого класу диференціальних рівнянь старших порядків:

$$\prod_{k=0}^{n-1}(\mathcal{D}+\alpha-2\beta k)(\mathcal{D}+\alpha-2\beta k-2\beta\nu)u(x)= =(-1)^n \beta^{2n}\gamma^{2n} x^{2n\beta} u(x) \tag{3.1.2}$$

Розв'язок цього рівняння мають вигляд:

$$u(x)=x^{\beta\nu-\alpha} Z_\nu(\gamma x^\beta) \tag{3.1.3}$$

де $\gamma=c\exp(ik\pi/n)$ для $k=1..n$

Отриманий розв'язок утворює фундаментальну систему. Ми можемо отримати окремі випадки — наприклад диференціальні рівняння четвертого і вищого парного порядку.

До диференціальних рівнянь вищих порядків часто приводить метод розділення змінних в прикладних завданнях математичної фізики. Розглянемо диференціальне рівняння четвертого порядку, що описує поперечні коливання конічного стрижня:

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}\left(\zeta^4 \frac{d^2u}{d\zeta^2}\right)=\zeta^2 u(\zeta) \tag{3.1.4}$$

Якщо провести заміну змінних

$x=2\zeta^{1/2}$ і позначити $\zeta^2 u(\zeta)=z(x)$

то рівняння четвертого порядку (3.1.4) може бути приведене до системи двох рівнянь Беселя:

$$z''(x)+\frac{1}{x}z'(x)\pm z(x)-\frac{4}{x^2}z(x)=0 \tag{3.1.5}$$

Розглянемо найбільш загальний випадок приводимості лінійних диференціальних рівнянь старших порядків до рівняння Беселя, скориставшись результатами, отриманими в попередньому розділі. Очевидно, що до рівняння Беселя можуть приводитися диференціальні рівняння старшого порядку з парною старшою похідною.

Для цього розглянемо узагальненого диференціального оператора (3.1.1) і вивчимо його властивості детальніше. Розглянемо приведення різних диференціальних рівнянь до загального вигляду з використанням оператора (3.1.1).

Щоб розглянути узагальнений диференціальний оператор старших порядків, запишемо наступне:

$$\prod_{k=1}^{n}(\mathcal{D}+a_k)=\sum_{k=0}^{n}\mathcal{D}^k S_{n-k} \tag{3.1.6}$$

де $S_0=1 \qquad S_1=a_1+\ \dots\ +a_n \qquad S_n=a_1\ \dots\ a_n$

$$S_k=\sum_{0}^{n-k} a_{i1}\dots a_{ik} \quad \text{для всіх індексів} \quad ip\neq il$$

Розглянемо узагальнений диференціальний оператор другого порядку і отримаємо вираз в явній формі:

$$(\mathcal{D}+a_1)(\mathcal{D}+a_2)=\left(x\frac{d}{dx}+a_1\right)\left(x\frac{d}{dx}+a_2\right)=$$

$$=x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\left(a_1+a_2+1\right)\frac{d}{dx}+a_1a_2 \tag{3.1.7}$$

Звідси можна отримати окремий випадок:

$$(\mathcal{D}+\nu)(\mathcal{D}-\nu)=x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx}-\nu^2 \tag{3.1.8}$$

Рівняння Беселя можна представити у вигляді:

$$(\mathcal{D}+\nu)(\mathcal{D}-\nu)\,z(x)+x^2z(x)=0 \tag{3.1.9}$$

Диференціальне рівняння старшого порядку, яке може бути приведене до рівняння Беселя, повинне бути приведене до наступного вигляду:

$$\prod_{k=1}^{n}\left((\mathcal{D}+\nu_k)(\mathcal{D}-\nu_k)+x^2\right)z(x)=0 \tag{3.1.10}$$

Фундаментальною системою розв’язків рівняння вигляду (3.1.10) є лінійно-незалежні функції $z_{\pm k}(x)$.

Це справедливо, оскільки виконується тотожність:

$$\left((\mathcal{D}+\nu_k)(\mathcal{D}-\nu_k)+x^2\right)z_{\pm k}(x)=0 \tag{3.1.11}$$

для кожного значення параметра $k=1..n$

Для того, щоб лінійні диференціальні рівняння старшого порядку вивчати на приводимість до класичного рівняння Беселя, ці рівняння необхідно привести до вигляду (3.1.10). Далі необхідно виділити пари лінійних операторів, добутки яких приводять до класичного рівняння Беселя (3.1.11).

Наприклад, диференціальне рівняння четвертого порядку може бути приведене до двох лінійно-незалежних рівнянь Беселя, шостого порядку — до трьох рівнянь.

Таким чином, загальний розв’язок диференціального рівняння старшого порядку може бути представлений лінійною комбінацією частинних розв’язків рівнянь Беселя, до яких було приведено диференціальне рівняння.

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку достатньо часто зустрічаються в прикладних задачах математичної фізики.

Питання приведення лінійних диференціальних рівнянь другого порядку до рівняння Беселя розглядалися в попередньому розділі та вже представляли певну складність. Приведення рівнянь старшого порядку — ще складніший і копіткіший процес.

У завданнях математичної фізики можуть зустрічатися лінійні диференціальні рівняння четвертого порядку — наприклад, вони задають опис прочностних характеристик, складні коливання і так далі. Знаходження аналітичних розв’язків таких рівнянь є достатньо складним.

Отримання аналітичних розв’язків диференціальних рівнянь шостого порядку і вище на практиці виявляється вкрай скрутним — або ці рівняння аналітично приводяться до рівнянь меншого порядку, або для їх розв’язку використовують чисельні методи й комп’ютерні обчислення.

Загальний розв’язок диференціальних рівнянь старших порядків можна аналогічно шукати в загальному вигляді:

$$u(\zeta)=A(\zeta)\sum_{k=1}^{n}c_{k1}z_k(\psi(\zeta))+c_{k2}z_{-k}(\psi(\zeta)) \tag{3.1.12}$$

де $z_{\pm k}(x)$ — пари лінійно-незалежних рішень рівнянь Беселя з індексами ν_k

Розглянемо популярний окремий випадок диференціальних рівнянь — рівняння четвертого порядку, загальний розв'язок якого можна представити через дві пари лінійно-незалежних розв'язків рівняння Беселя дійсного і чисто уявного змінного одного індексу.

$$\left((\mathcal{D}+\nu)(\mathcal{D}-\nu)+x^2\right)z(x)=0 \tag{3.1.9}$$

$$\left((\mathcal{D}+\nu)(\mathcal{D}-\nu)-x^2\right)z(x)=0 \tag{3.1.13}$$

$$z(x)=c_1 J_\nu(x)+c_2\mathcal{N}_\nu(x)+c_3 I_\nu(x)+c_4\mathcal{K}_\nu(x)$$

Диференціальне рівняння четвертого порядку, розв'язок якого може бути представлений таким чином, (3.1.10) записується у вигляді:

$$\left((\mathcal{D}+\nu)(\mathcal{D}-\nu)+x^2\right)\left((\mathcal{D}+\nu)(\mathcal{D}-\nu)-x^2\right)z(x)=0$$

$$\left(\mathcal{D}^4-2\nu^2\mathcal{D}^2+\nu^4-x^4\right)z(x)=0 \tag{3.1.14}$$

Випишемо ступені диференціального оператора:

$$\mathcal{D}^2=x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx} \tag{3.1.15}$$

$$\mathcal{D}^3=x^3\frac{d^3}{dx^3}+3x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx} \tag{3.1.16}$$

$$\mathcal{D}^4=x^4\frac{d^4}{dx^4}+6x^3\frac{d^3}{dx^3}+7x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx} \tag{3.1.17}$$

Після приведення отримаємо наступне диференціальне рівняння достатньо складного вигляду:

$$\left(x^4\frac{d^4}{dx^4}+6x^3\frac{d^3}{dx^3}+x^2(7-2\nu^2)\frac{d^2}{dx^2}+x(1-2\nu^2)\frac{d}{dx}+\nu^4-x^4\right)z(x)=0 \tag{3.1.18}$$

Аналогічно можна розглянути випадок, коли індекс одного рівняння Беселя, відповідного дійсному змінному, не рівний індексу другого рівняння Беселя, відповідного чисто уявному змінному:

$$z(x)=c_1 J_{\nu 1}(x)+c_2\mathcal{N}_{\nu 1}(x)+c_3 I_{\nu 2}(x)+c_4\mathcal{K}_{\nu 2}(x)$$

$$\left((\mathcal{D}+\nu_1)(\mathcal{D}-\nu_1)+x^2\right)\left((\mathcal{D}+\nu_2)(\mathcal{D}-\nu_2)-x^2\right)z(x)=0$$

$$\left(\mathcal{D}^4-(\nu_1^2+\nu_2^2)\mathcal{D}^2+\nu_1^2\nu_2^2+x^2(\nu_1^2-\nu_2^2)-x^4\right)z(x)=0 \tag{3.1.19}$$

Після приведення отримаємо наступне диференціальне рівняння достатньо складного вигляду:

$$\left(x^4\frac{d^4}{dx^4}+6x^3\frac{d^3}{dx^3}+x^2(7-(\nu_1^2+\nu_2^2))\frac{d^2}{dx^2}+x(1-(\nu_1^2+\nu_2^2))\frac{d}{dx}+\nu_1^2\nu_2^2+x^2(\nu_1^2-\nu_2^2)-x^4\right)z(x)=0 \tag{3.1.20}$$

Рівняння можна переписати у вигляді:

$$\left(\frac{d^4}{dx^4}+\frac{6}{x}\frac{d^3}{dx^3}+\frac{7-(\nu_1^2+\nu_2^2)}{x^2}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1-(\nu_1^2+\nu_2^2)}{x^2}\frac{d}{dx}+\frac{\nu_1^2\nu_2^2}{x^4}+\frac{\nu_1^2-\nu_2^2}{x^2}-1\right)z(x)=0 \tag{3.1.21}$$

Варіант, коли розв'язок рівняння четвертого порядку уявно тільки через функції дійсного або тільки чисто уявного змінного, розглядається аналогічно. Проте в практичних завданнях математичної фізики випадок (3.1.14) і (3.1.19) зустрічається частіше. А зараз розглянемо алгоритми на мові JavaScript.

Розділ IV
Програми і алгоритми обчислень

§ 1. Загальна постановка завдання обчислень

У даному розділі приводяться програми обчислень функцій Беселя та інших циліндрових функцій математичної фізики, написані автором на мові JavaScript. На сьогоднішній день мова JavaScript має достатньо багато переваг в порівнянні з іншими мовами програмування.

На відміну від популярних мов типу C++, Pasal та ін., мова JavaScript підтримується практично всіма сучасними інтернет-браузерами і не вимагає спеціальної інсталяції. JavaScript — вбудована мова програмування веб-сторінок, яка має дуже хороші засоби виводу на екран монітора й у файл у формі HTML- і XML-разметки. Програми виконуються на локальному комп'ютері.

Виведення даних і результатів розрахунків на монітор у формі таблиць або текстового файлу не представляє ніяких ускладнень, оскільки воно передбачене засобами мови JavaScript. Користувачеві залишається тільки зберегти результати обчислень на локальний комп'ютер із браузера.

Недоліком JavaScript є відсутність засобів для виведення графічної інформації та побудови графіків, але це не перешкодило авторові, яка змогла реалізувати виведення даних на екран монітора і на друк у формі емуляції псевдо-графіки засобами розмітки. Швидкість отрисовки графіків залежить в першу чергу від типу інтернет-браузера й декілька менше — від швидкості локального комп'ютера.

До другої половини XX століття було накопичено хороші математичні бібліотеки, написані на мовах типу Алгол, Фортран та ін. Проте до кінця XX століття відбувся якісний скачок в розвитку програмування — були створені принципово нові об'єктно-орієнтовані мови структурного програмування типу PL/1, Pascal, C, C++ та ін. Почалася розробка принципово нового засобу електронного подавання та передачі інформації — глобальної мережі

Інтернет. Для реалізації клієнтських сценаріїв була створена **нова прогресивна мова JavaScript.** Глобалізація світових процесів мала й істотні недоліки — зокрема, було фактично загублено багато програмних розробок математичного апарату.

На початку XXI століття програми математичного апарату почали відновлюватися. Були розроблені спеціальні математичні бібліотеки, в яких вже перевірені алгоритми чисельних методів були переписані новими засобами програмування. До недоліку таких бібліотек відноситься їх закритість і те, що вони розповсюджуються за платною ліцензією або незаконними «піратськими» копіями. Одними з найбільш популярних мов програмування почала XXI століття продовжують залишатися Pascal, C, C++ і тому подібні.

До безперечних достоїнств мови JavaScript відноситься її доступність і відкрита архітектура, хороші засоби для виведення даних в інтернет-браузери, фактична безкоштовність та вільне розповсюдження бібліотек програм на JavaScript. Хоча ця мова й має багато схожого з C++ (саме на його базі була побудована система команд JavaScript), ідеологія програмування на JavaScript помітно відрізняється від C та C++, швидше нагадуючи «просунуті» версії мови PL/1 та подібних ранніх мов структурного програмування.

Практично ніхто з розробників сучасних математичних програм не використовує вбудовану в браузери мову програмування JavaScript для проведення математичних обчислень. Ця мова найчастіше використовується для створення динамічного дизайну веб-сторінок та попередньої обробки даних веб-дизайнерами, а не програмістами як такими.

Працюючи веб-дизайнером, створюючи веб-сайти, веб-сторінки і програми на JavaScript для «клієнтської сторони», автор змогла побачити практично необмежені можливості та приголомшливу гнучкість цієї мови і зручність її застосування, яка абсолютно незаслужено не використовується в математичному програмуванні. З метою показати переваги прогресивної мови JavaScript автор розробила серію математичних програм для обчислення значень спеціальних функцій.

Мова JavaScript створює певні труднощі для сучасних програмістів й особливо для програмістів-математиків — автор не зустрічала програм з арсеналу математичного апарату і чисельних методів, реалізованих засобами мови JavaScript.

Для того, щоб складати реальні комерційні програми на цій мові, недостатньо вивчити програмування як воно є і систему команд JavaScript. Виведення даних з мови JavaScript має свою характерну специфіку — воно здійснюється у формі HTML- і XML-кодів і веб-сторінок в інтернет-браузер. Мова JavaScript тісно пов'язана з мовами гіпертекстової розмітки і є невід'ємним вбудованим об'єктом у веб-сторінках.

Для мінімального оформлення виведення даних з програм, написаних на JavaScript, необхідне елементарне знання HTML- і XML-разметки. Глибоке ж знання веб-дизайну і мови гіпертекстової розмітки дозволяє виводити на екран монітора дані практично будь-якого візуально-привабливого дизайну і оформлення.

Надзвичайно зручним засобом для розповсюдження та обміну програм, написаних на мові JavaScript, є глобальна мережа Інтернет. Вбудовані у веб-сторінки програми можуть розміщуватися на інтернет-сайтах як в публічному, так і в конфіденційному (платному або парольному) режимах. Виконуються написані програми на стороні Клієнта в його інтернет-браузері, тому серверна сторона для обчислень не задіюється.

Користувач написаних на мові JavaScript програм може не мати особливих навичок роботи в спеціальних програмних пакетах, не встановлювати дорогих комерційних програм і не купувати особливих ліцензій — йому досить мати інтернет-браузер та елементарні навички користувача мережі Інтернет.

Для збереження результатів обчислень досить зберігти веб-сторінку, що була згенерована JavaScript'ом, на локальний комп'ютер або скопіювати дані з інтернет-браузера в будь-який зручний користувачеві додаток (зокрема офісний). Можна також відправити дані на друк на принтер або у файл PDF, надалі провівши обробку цього файлу в більш універсальному форматі.

§ 2. Програмне обчислення функцій Беселя

У § 5 розділу 2 було отримане класичне розкладення в ряд функцій Беселя з використанням гамма-функцій Ейлера, а саме:

$$z_{\mp\nu}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{\mp\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(\mp\nu+k+1)} \qquad (2.5.7)$$

Прикладні обчислення значень функцій Беселя в околі нуля для малих індексів із заданою точністю з використанням комп'ютерних технологій засновано саме на цьому розкладенні в ряд.

Дана формула не може бути використана для обчислень значень функцій Беселя при цілих негативних значеннях індексу, оскільки в явному вигляді вона вироджується. При знаходженні значень функцій Беселя з напівцілим індексом також використовуються інші розкладення — в кінцевий ряд в явному вигляді.

Програма 1. *Обчислення значень функцій Беселя при цілих ненегативних значеннях індексу на базі раніше отриманого розкладення в ряд*

$$J_n(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k!\,(n+k)!} \text{ при } n\geqslant 0 \qquad (2.5.8)$$

Оскільки розрахунки проводяться на персональних комп'ютерах з 32-розрядним представленням даних, і мова JavaScript розрахована саме на таке представлення інформації, ми можемо проводити розрахунки з розумною точністю (погрішністю), що не перевищує $E = 10^{-12}$.

Для більшої частини прикладних задач ці показники погрішності обчислень є достатніми і задовільними. Велику частину обчислень можна проводити з меншою погрішністю — порядку $E = 10^{-6}$. Алгоритми, що приводяться, є стійкими і враховують негативні особливості 32-розрядного представлення. Використання цих програм для 64-розрядного представлення не має ніяких ускладнень і обмежень.

Відповідно до (2.5.8) початковий член ряду розкладення функцій Беселя обчислюється за формулою:

$$a_0 = \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \tag{4.2.1}$$

Кожен подальший член цього ряду може бути обчислений відповідно до рекурентного відношення:

$$a_k = a_{k\text{-}1} \frac{(-1)\ (x/2)^2}{k\,(n+k)} \tag{4.2.2}$$

На підставі цього програмний модуль на мові JavaScript для розрахунку значень функції Беселя з цілим ненегативним індексом, вбудований у веб-сторінки й такий, що проводить обчислення без округлення із заданою точністю (погрішністю), може бути представлений наступним чином:

```
<script type="text/javascript">
function NNBessel(x,n,eps)
{
   var Emax = 1E-13; /* максимальна погрішність  */
   var Emin = 1E-6;  /* мінімальна погрішність */

   if (x == null)  x = 0;  /* змінна */
   if (n == null)  n = 0;  /* індекс функції */
   if (eps == null)  eps = Emin;
   eps = Math.abs(eps);

   /* далі виправлення і корекція заборонені  */
   if (eps > Emin)  eps = Emin;    /* виправлення */
   if (eps < Emax)  eps = Emax;

   x = Math.abs(x);
   n = Math.abs(n);    /* округлення індексу */
   n = Math.floor(n);

   var ak = 1; /* змінні ітерації */
   var s = 0;  /* змінні - сума ряду */
   var k = 0;  /* нумерація членів ряду */
   var i = 1;
```



```
   /* обчислення нульового члена ряду */
   for (i = 1; i <= n; i++)    ak = ak * x / 2 / i;

   /* обчислення ряду із заданою погрішністю */
   while (Math.abs(ak) > eps)
   {
      s = s + ak;
      k = k + 1;
      ak = (-1) * ak * x * x / (4 * k * (n + k));
   }

   /* виправлення погрішності та расходимости */
   if (Math.abs(s) < Emax)  s = 0;
   if (Math.abs(s) > 1)  s = 0;

   /* повернення отриманого значення суми ряду */
   return s;
}
</script>
```

Виклик розрахунку функції Беселя з цілим індексом проводиться шляхом виклику **NNBessel(x,n,eps)**, де

x — значення змінної;
n — номер індексу функції Беселя;
eps — точність (погрішність) обчислень.

Якщо вказані значення не будуть задані в параметрах і не визначені, то за умовчанням приймаються наступні значення змінних для функції **NNBessel**:

x = 0 — значення змінної;
n = 0 — номер індексу функції Беселя;
eps = 1E-6 — точність (погрішність) обчислень.

Всі вказані значення змінних можуть бути перевизначені та задані безпосередньо користувачем в тексті самої програми — в явному вигляді.

Програма коректно працює у всіх поширених інтернет-браузерах на комп'ютерах не нижче ніж із 32-розрядними представленнями, при значеннях цілого індексу **n** від 0 до 10 (індекси округляються) і при значеннях змінної **x** від 0 орієнтовно до 50 та менш.

Якнайкращі результати обчислень спостерігаються при малих значеннях індексу в деякій околі нуля.

На практиці користувачеві може знадобитися вже готовий виконуваний модуль — як для обчислень конкретних значень функцій Беселя з цілим ненегативним індексом, так і для отримання таблиць значень функцій Беселя і навіть візуальної побудови графіків на моніторі.

Приводиться повний HTML-код веб-сторінок, який без змін необхідно записати в текстовий файл в будь-якому текстовому редакторові, встановивши йому спеціальне розширення .htm або .html. Активувавши файл в інтернет-браузері в локальному режимі (наприклад, подвійним клацанням миші по імені файлу або правою кнопкою миші), користувач зможе провести всі необхідні йому розрахунки.

У коді, що приводиться, використаний мінімальний дизайн й строге оформлення, яке може бути змінене шляхом застосування стилів і CSS.

Особливістю даних програм є звіт про хід виконання обчислювального процесу, який змінюється та друкується внизу вікна в рядку стану інтернет-браузера. Результати виконання програми у вигляді таблиці або графіка демонструються в новому вікні, що відкривається з моменту запуску програми.

Далі отримані результати розрахунків можуть бути збережені на локальний комп'ютер або скопійовані в будь-яке офісну або іншу сумісну програму.

Необхідно також пам'ятати, що в мові JavaScript десяткові дроби записуються з роздільником у вигляді крапки, тому кому в числах використовувати заборонено.

Наступна програма проводить побудову таблиці значень для функцій Беселя із заданим цілим індексом та змінними. Рекомендується створити текстовий файл з ім'ям і розширенням **TabBessel.html**

```
<html>
<head>
<title>Функції Беселя :: таблиця значень</title>

<script type="text/javascript">
/* Функція виведення таблиці Фнк. Беселя */
function TabBessel()
```



```
{
   /* кожного разу відкривається нове вікно */
   var msgWindow = Math.random() * 1000000;
   msgWindow = Math.floor(msgWindow);
   MsgBox = window.open("",msgWindow,"toolbar=yes,locat
ion=yes,scrollbars=yes,directories=yes,status=yes,menu
bar=yes,resizable=yes");

   /* визначення змінних */
   var Emax = 1E-12;
   var Emin = 1E-1;
   var PEmax = 12;
   var PEmin = 1;

   var i = 0; var j = 0;
   var index1 = Math.floor(document.form4.index1.value);
   var index2 = Math.floor(document.form4.index2.value);
   var delta = Math.abs(document.form4.delta.value);
   var eps = Math.abs(document.form4.eps.value);

   /* приведення констант до допустимих значень */
   if (delta < Emax) delta = Emax;
   if (eps < PEmin) eps = PEmin;
   if (eps > PEmax) eps = PEmax;

   if ((index1 < 0) && (index2 < 0))
      { index1 = Math.abs(index1);
      index2 = Math.abs(index2); }
      else if ((index1 < 0) && (index2 >= 0))
         { index2 = Math.max(-index1,index2);
         index1 = 0; }
         else if ((index1 >= 0) && (index2 < 0))
            { index2 = Math.max(index1,-index2);
            index1 = 0; }

   if (index2 < index1)
      { var index0 = index2;
      index2 = index1; index1 = index0; }

   var NN = index2 - index1 + 1;
   var iks1 = Math.abs(document.form4.iks1.value);
   var iks2 = Math.abs(document.form4.iks2.value);

   if (iks2 < iks1)
      { var iksx = iks2; iks2 = iks1; iks1 = iksx; }
   var iks = iks1;
   var ind = index1;
   var Bessel = 0;
```

```
   var delta2 = delta;  /* боротьба з округленням */
   var p = 0;           /* порядок ступеня кроку */
   var a = new Array();

   /* визначення порядку ступеня кроку p */
   while (Math.abs(delta2 - Math.floor(delta2)) > Emax)
   { delta2 = delta2 * 10 - Math.floor(delta2 * 10);
   p = p + 1; }

   /* виведення заголовка сторінки і таблиці */
   MsgBox.document.writeln('<html><head><title>Функції
Беселя :: таблиця значень</title>');
   MsgBox.document.writeln("<meta http-equiv='content-
type' content='text/html; charset=windows-1251' /></
head>");
   MsgBox.document.writeln("<body><table style='font-
size: 9pt; text-align: right; font-family: verdana,ari
al,helvetica'><colgroup><col width='100' />");

   for (i = index1; i <= index2; i++) MsgBox.document.
writeln("<col width='150' />");

   MsgBox.document.writeln("</colgroup><tbody><tr
style='text-align: left; font-weight: bold;'><td>x</
td>");

   for (i = index1; i <= index2; i++) MsgBox.document.
writeln("<td style='text-align: right; font-weight:
bold;'>J<sub>",i,"</sub> (x)</td>");

   var Miterac = Math.floor((iks2 - iks1) / delta) + 1;
   var Niterac = 1; var delta1 = iks;

   while ((Niterac <= Miterac) && (delta1 < iks2))
      { delta1 = iks;     /* боротьба з округленням */
      delta1 = Math.round(delta1 * Math.pow(10,p)) /
Math.pow(10,p);
      MsgBox.document.writeln("</tr>\n<tr><td
style='text-align: left; font-weight:
bold;'>",delta1,"</td>");
      /* запис про ітерацію в рядок стану */
      MsgBox.document.writeln('<script type="text/
javascript">window.status=("Виконується ітерація для
      аргументу x = '+delta1+' !! ")</'+'script'+'>');
```



```
      /* виклик значень функцій і запис в таблицю */
      for (i = index1; i <= index2; i++)
        { Bessel = NBessel(iks,i,eps);
        MsgBox.document.writeln("<td>",Bessel,"</td>"); }

      iks = iks + delta;
      Niterac = Niterac + 1;
      }

   /* закриття кодів таблиці та веб-сторінки */
   MsgBox.document.writeln("</tr></tbody></table>");
   MsgBox.document.writeln("</body></html>");
   MsgBox.document.close();
}

/* Отримання значення Фнк. Беселя з округленням */
function NBessel(x,n,Peps)
{
   var k = 0; var i = 1;
   var Emax = 1E-12; /* гранична погрішність */
   var Emin = 1E-1;  /* мінімальна погрішність */

   var PEmax = 12;
   var PEmin = 1;

   if (n == null) n = 1;
   if (x == null) x = 0;
   x = Math.abs(x);
   n = Math.abs(n);        /* округлення індексу */
   n = Math.floor(n);

   var eps = 1;
   if (Peps == null) Peps = PEmin;
   Peps = Math.abs(Peps);
   eps = 1 / Math.pow(10,Peps);

   if (eps > Emin) eps = Emin;
   if (eps < Emax) eps = Emax;

   /* Розрахунок значень Фнк. Беселя без округлення */
   var ak = 1;
   var s = 0;
   for (i = 1; i <= n; i++)   ak = ak * x / 2 / i;

   while (Math.abs(ak) > (eps / 10))
      {  s = s + ak;
      k = k + 1;
      ak = (-1) * ak * x * x / (4 * k * (n + k));
      }
```

```
   /* виправлення погрішності та расходимости */
   if (Math.abs(s) < Emax)  s = 0;
   if (Math.abs(s) > 1)  s = 0;

   /* виведення коректного округлення отриманої суми */
   var sgnm = 0;
   if (s > 0) sgnm = 1;
   if (s < 0) sgnm = -1;
   s = Math.abs(s);

   var a = new Array();
   a[0] = Math.floor(s);
   a[1] = ".";
   var str = s - a[0];

   for (i = 2; i <= (Peps + 2); i++)
      { a[i] = Math.floor(str * 10);
      str = str * 10 - Math.floor(str * 10);
      }

   k = Peps + 2;
   if (a[k] > 4)
      { k = k - 1;
      if (k == 1) k = 0;
      a[k] = a[k] + 1;
      while ((a[k] > 9) && (k > 0))
         { a[k] = 0;
         k = k - 1;
         if (k == 1) k = 0;
         a[k] = a[k] + 1;
         }
      }

   /* злиття отриманої таблиці в єдиний рядок */
   a.pop();
   if ((sgnm == -1) && (a.join("") > 0)) a.unshift("-");
   s = a.join("");

   /* повернення коректно округленого результату */
   return s;
}
</script>
</head>

<body>
<!-- Початок відрисовки форми запиту -->
<form method="post" name="form4" id="form4">
```



```
Функції Беселя індексу n від <input type="text"
name="index1" id="index1" style="width: 50px; height:
22px; border:#5a7381 1px solid;" /> до <input
type="text" name="index2" id="index2" style="width:
50px; height: 22px; border:#5a7381 1px solid;" />
з округленням і погрішністю 10 <input type="text"
value="-6" name="eps" id="eps" style="width: 50px;
height: 22px; border:#5a7381 1px solid;" />

<br /><br />Інтервал змінної x від <input type="text"
name="iks1" id="iks1" style="width: 50px; height:
22px; border:#5a7381 1px solid;" /> до <input
type="text" name="iks2" id="iks2" style="width: 50px;
height: 22px; border:#5a7381 1px solid;" />
з кроком <input type="text" value="1E-1" name="delta"
id="delta" style="width: 50px; height: 22px;
border:#5a7381 1px solid;" />

<input type="button" value="Таблиця Фнк. Беселя"
onClick="TabBessel()" style="width: 180px; height:
22px; border:#5a7381 1px solid;" />

</form>
</body></html>
```

Можна легко відзначити, що безпосереднє обчислення значень функції Беселя займає незначний об’єм програми — не більше 5%.

Близько 95% об’єму тексту програми займають перевірки коректності введених даних, їх виправлення, організація виведення результатів обчислень у формі таблиці та веб-сторінки в коректній формі після округлення (в т.ч. зі всіма нулями в кінці чисел).

Необхідність генерації кодів гіпертекстової розмітки в ході виконання програми найчастіше й викликає складнощі у програмістів, не знайомих із веб-дизайном. Проте це ж саме робить програми на мові JavaScript зручними і простими для їх кінцевого користувача.

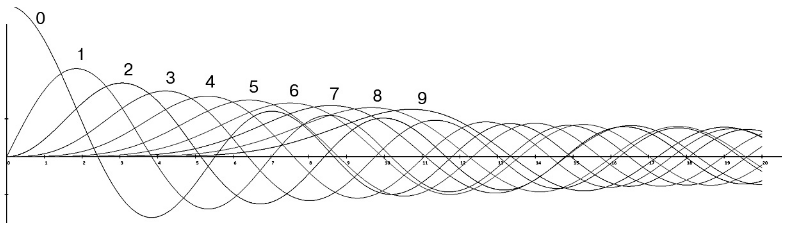
Приведений текст програми працездатний — його можна використовувати для обчислень. Як приклад приведемо таблиці значень функцій Беселя, отримані за допомогою справжньої програми. Витрачений на розрахунки і виведення даних час склав 2-3 секунди.

Функции Бесселя индекса n от 0 до 6 с округлением и погрешностью 10^{-6}

Интервал переменной x от 0 до 12 с шагом 1E-1 Таблица Фнк. Бесселя

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$	$J_6(x)$
0	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.997502	0.049938	0.001249	0.000021	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.990025	0.099501	0.004983	0.000166	0.000004	0.000000	0.000000
0.3	0.977626	0.148319	0.011166	0.000559	0.000021	0.000001	0.000000
0.4	0.960398	0.196027	0.019735	0.001320	0.000066	0.000003	0.000000
0.5	0.938470	0.242268	0.030604	0.002564	0.000161	0.000008	0.000000
0.6	0.912005	0.286701	0.043665	0.004400	0.000331	0.000020	0.000001
0.7	0.881201	0.328996	0.058787	0.006930	0.000610	0.000043	0.000003
0.8	0.846287	0.368842	0.075818	0.010247	0.001033	0.000083	0.000006
0.9	0.807524	0.405950	0.094586	0.014434	0.001641	0.000149	0.000011
1	0.765198	0.440051	0.114903	0.019563	0.002477	0.000250	0.000021
1.1	0.719622	0.470902	0.136564	0.025695	0.003588	0.000399	0.000037
1.2	0.671133	0.498289	0.159349	0.032874	0.005023	0.000610	0.000061
1.3	0.620086	0.522023	0.183027	0.041136	0.006831	0.000901	0.000099
1.4	0.566855	0.541948	0.207356	0.050498	0.009063	0.001290	0.000152
1.5	0.511828	0.557937	0.232088	0.060964	0.011768	0.001799	0.000228
1.6	0.455402	0.569896	0.256968	0.072523	0.014995	0.002452	0.000332
1.7	0.397985	0.577765	0.281739	0.085150	0.018790	0.003275	0.000472
1.8	0.339986	0.581517	0.306144	0.098802	0.023197	0.004294	0.000657
1.9	0.281819	0.581157	0.329926	0.113423	0.028253	0.005538	0.000897
2	0.223891	0.576725	0.352834	0.128943	0.033996	0.007040	0.001202
2.1	0.166607	0.568292	0.374624	0.145277	0.040453	0.008828	0.001587
2.2	0.110362	0.555963	0.395059	0.162325	0.047647	0.010937	0.002066
2.3	0.055540	0.539873	0.413915	0.179979	0.055596	0.013397	0.002653
2.4	0.002508	0.520185	0.430980	0.198115	0.064307	0.016242	0.003367
2.5	-0.048384	0.497094	0.446059	0.216600	0.073782	0.019502	0.004225
2.6	-0.096805	0.470818	0.458973	0.235294	0.084013	0.023207	0.005246
2.7	-0.142449	0.441601	0.469562	0.254045	0.094984	0.027388	0.006452
2.8	-0.185036	0.409709	0.477685	0.272699	0.106669	0.032069	0.007863
2.9	-0.224312	0.375427	0.483227	0.291093	0.119033	0.037276	0.009503
3	-0.260052	0.339059	0.486091	0.309063	0.132034	0.043028	0.011394
3.1	-0.292064	0.300921	0.486207	0.326443	0.145618	0.049345	0.013559
3.2	-0.320188	0.261343	0.483528	0.343066	0.159722	0.056238	0.016022
3.3	-0.344296	0.220663	0.478032	0.358769	0.174275	0.063717	0.018806
3.4	-0.364296	0.179226	0.469722	0.373389	0.189199	0.071785	0.021934
3.5	-0.380128	0.137378	0.458629	0.386770	0.204405	0.080442	0.025429
3.6	-0.391769	0.095466	0.444805	0.398763	0.219799	0.089680	0.029311
3.7	-0.399230	0.053834	0.428330	0.409225	0.235279	0.099485	0.033601
3.8	-0.402556	0.012821	0.409304	0.418026	0.250736	0.109840	0.038316
3.9	-0.401826	-0.027244	0.387855	0.425044	0.266059	0.120718	0.043474
4	-0.397150	-0.066043	0.364128	0.430171	0.281129	0.132087	0.049088
4.1	-0.388670	-0.103273	0.338292	0.433315	0.295827	0.143908	0.055168
4.2	-0.376557	-0.138647	0.310535	0.434394	0.310029	0.156136	0.061725
4.3	-0.361011	-0.171897	0.281059	0.433347	0.323611	0.168720	0.068761
4.4	-0.342257	-0.202776	0.250086	0.430127	0.336450	0.181601	0.076279
4.5	-0.320542	-0.231060	0.217849	0.424704	0.348423	0.194715	0.084276
4.6	-0.296138	-0.256553	0.184593	0.417069	0.359409	0.207991	0.092745
4.7	-0.269331	-0.279081	0.150573	0.407228	0.369293	0.221355	0.101676
4.8	-0.240425	-0.298500	0.116050	0.395208	0.377960	0.234725	0.111051
4.9	-0.209738	-0.314695	0.081292	0.381055	0.385307	0.248017	0.120850
5	-0.177597	-0.327579	0.046565	0.364831	0.391232	0.261141	0.131049
5.1	-0.144335	-0.337097	0.012140	0.346618	0.395647	0.274004	0.141616
5.2	-0.110290	-0.343223	-0.021718	0.326517	0.398468	0.286512	0.152516
5.3	-0.075803	-0.345961	-0.054748	0.304641	0.399625	0.298567	0.163708
5.4	-0.041210	-0.345345	-0.086695	0.281126	0.399058	0.310070	0.175147
5.5	-0.006844	-0.341438	-0.117315	0.256118	0.396717	0.320925	0.186783
5.6	0.026971	-0.334333	-0.146375	0.229779	0.392567	0.331031	0.198560
5.7	0.059920	-0.324148	-0.173656	0.202284	0.386586	0.340293	0.210420
5.8	0.091703	-0.311028	-0.198954	0.173818	0.378766	0.348617	0.222298
5.9	0.122033	-0.295142	-0.222082	0.144579	0.369111	0.355911	0.234127
6	0.150645	-0.276684	-0.242873	0.114768	0.357642	0.362087	0.245837
6.1	0.177291	-0.255865	-0.261182	0.084598	0.344393	0.367065	0.257352
6.2	0.201747	-0.232917	-0.276882	0.054283	0.329414	0.370767	0.268597
6.3	0.223812	-0.208087	-0.289871	0.024042	0.312768	0.373124	0.279493
6.4	0.243311	-0.181637	-0.300072	-0.005908	0.294534	0.374075	0.289958
6.5	0.260095	-0.153841	-0.307430	-0.035347	0.274803	0.373565	0.299913
6.6	0.274043	-0.124980	-0.311916	-0.064060	0.253680	0.371551	0.309276
6.7	0.285065	-0.095342	-0.313525	-0.091837	0.231283	0.367996	0.317965
6.8	0.293096	-0.065219	-0.312277	-0.118474	0.207742	0.362876	0.325900
6.9	0.298102	-0.034902	-0.308219	-0.143775	0.183197	0.356177	0.333002
7	0.300079	-0.004683	-0.301417	-0.167556	0.157798	0.347896	0.339197
7.1	0.299051	0.025153	-0.291966	-0.189641	0.131706	0.338042	0.344410
7.2	0.295071	0.054327	-0.279980	-0.209872	0.105087	0.326635	0.348573
7.3	0.288217	0.082570	-0.265595	-0.228102	0.078114	0.313706	0.351621
7.4	0.278596	0.109625	-0.248968	-0.244202	0.050966	0.299301	0.353494
7.5	0.266340	0.135248	-0.230273	-0.258061	0.023825	0.283474	0.354140
7.6	0.251602	0.159214	-0.209703	-0.269584	-0.003126	0.266293	0.353512
7.7	0.234559	0.181313	-0.187465	-0.278697	-0.029702	0.247838	0.351570
7.8	0.215408	0.201357	-0.163778	-0.285346	-0.055719	0.228198	0.348280
7.9	0.194362	0.219179	-0.138873	-0.289495	-0.080996	0.207474	0.343621
8	0.171651	0.234636	-0.112992	-0.291132	-0.105357	0.185775	0.337576
9	-0.090334	0.245312	0.144847	-0.180935	-0.265471	-0.055039	0.204316
10	-0.245936	0.043473	0.254630	0.058379	-0.219603	-0.234062	-0.014459
11	-0.171190	-0.176785	0.139048	0.227348	-0.015040	-0.238286	-0.201584
12	0.047689	-0.223447	-0.084930	0.195137	0.182499	-0.073471	-0.243725

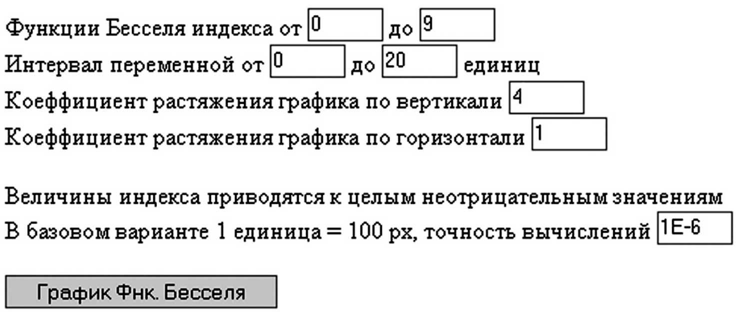
З погляду наочності інтерес представляє створення математично точних графіків функцій Беселя в інтервалі, на якому забезпечується збіжність приведеного вище алгоритму і програми. Хоча засоби мови JavaScript не надають можливостей роботи з графікою як такої та з векторними кривими, виявилося можливим замінити цей недолік іншими засобами.



На малюнку вгорі показаний точний графік функцій Беселя з 0 по 9 індексом в інтервалі від 0 до 20. Коефіцієнт розтягнення графіка по вертикалі рівний 4.

Графік цих функцій був відмальований програмою на моніторі комп'ютера без використання опорних точок, наближень й апроксимацій. Розрахунки проводилися для кожного окремого пікселя початкового зображення, з кроком 1 px, причому одна одиниця по горизонталі або вертикалі — 100 пікселів (без урахування розтягнення).

Щоб побудувати точне графічне зображення перших 10 функцій Беселя в інтервалі від 0 до 20, комп'ютер виконав (20 * 100) * 10 = 20 000 наближених обчислень значень функцій Беселя, виходячи з розкладення в ряд без округлення. Для розрахунку значення функції Беселя виконувалося в середньому від 5 до 25 ітерацій, що сумарно склало близько 300 000 ітерацій.



Персональному комп'ютеру середньої потужності та інтернет-браузеру Mozilla Firefox в локальному режимі було потрібно близько хвилини для закінчення обчислень і завершення повної отрисовки цих графіків. В той же час браузери IE і Opera витратили на аналогічний процес близько 10-15 хвилин, при цьому процес самої отрисовки графіків був добре видимий і наочний.

На графіках видно, що функції Беселя ніби то сплітаються в щільний джгут, який все щільніше притискається до горизонтальної осі по мірі зростання аргументу й індексу.

До достоїнств алгоритму, що приводиться, відноситься математична точність, універсальність і наочність, можливість зберігти результати на комп'ютері з браузера у вигляді файлу. До недоліків — достатньо великий об'єм файлу і сповільнена швидкість отрисовки його браузерами.

Наступна програма проводить побудову графіків для функцій Беселя із заданими цілими індексами і заданим інтервалом. Рекомендується створити текстовий файл з ім'ям і розширенням **GraphBessel.html**

```
<html>
<head>
<title>Функції Беселя :: побудова графиків</title>
<script type="text/javascript">
/* Функція виведення графіка Фнк. Беселя */
function GraphBessel()
   {
   /* Відкривається нове вікно */
   var msgWindow = Math.random() * 1000000;
   msgWindow = Math.floor(msgWindow);
   MsgBox = window.open("",msgWindow,"toolbar=yes,locat
ion=yes,scrollbars=yes,directories=yes,status=yes,menu
bar=yes,resizable=yes");

   /* Виведення заголовка веб-сторінки */
   MsgBox.document.writeln("<html><head><title>Функції
Беселя :: графік</title>");
   MsgBox.document.writeln("<meta http-equiv='content-
type' content='text/html; charset=windows-1251' />");
   MsgBox.document.writeln("<style>div { position:
absolute; } body { font-family: verdana, arial,
helvetica, sans-serif; font-size: 10pt; } </style></
head>"); MsgBox.document.writeln("<body>");
```

```
   var step = 100;
   var x1 = Math.abs(document.form5.iks1.value);
   var x10 = Math.floor(x1);
   var x2 = Math.abs(document.form5.iks2.value);
   var x20 = Math.floor(x2);
   var eps = Math.abs(document.form5.eps.value);
   var n = Math.floor(document.form5.index.value);
   var m = Math.floor(document.form5.index1.value);
   var koeff = Math.floor(Math.abs(document.form5.koeff.
value));
   if (koeff == 0)  koeff = 1;
   var koefg = Math.floor(Math.abs(document.form5.koefg.
value));
   if (koefg == 0)  koeff = 1;

   /* Побудова координатних осей */
   MsgBox.document.writeln("<div style='top: 40px;
left: 50px;'><table cellpadding='0' cellspacing='0'
style='width: 1px; height: ",(20 + koeff * 200),"px;
background-color: #5a7381;'><tr><td></td></
tr></table></div> <div style='top: 50px; left:
45px;'><table cellpadding='0' cellspacing='0'
style='width: 10px; height: 1px; background-
color: #5a7381;'><tr><td></td></tr></table></div>
<div style='top: ",(50 + koeff * 200),"px; left:
45px;'><table cellpadding='0' cellspacing='0'
style='width: 10px; height: 1px; background-color:
#5a7381;'><tr><td></td></tr></table></div> ");

   var ii = 1;
   for (ii = x10; ii < (x20 + 1); ii++)
      {
      MsgBox.document.writeln("<div style='font-size:
8pt; color: #5a7381; left: ",(52 + (ii - x10) * 100  *
koefg),"px; top: ",(60 + koeff * 100),"px;'>",ii,"</
div>");

      MsgBox.document.writeln("<div style='top: ",(45
+ koeff * 100),"px; left: ",(50 + (ii - x10) * 100  *
koefg),"px;'><table cellpadding='0' cellspacing='0'
style='width: 1px; height: 10px; background-
color: #5a7381;'><tr><td></td></tr></table></div>
<div style='top: ",(50 + koeff * 100),"px; left:
",(50 + (ii - x10) * 100  * koefg),"px;'><table
cellpadding='0' cellspacing='0' style='width: ",
(100 * koefg),"px; height: 1px; background-color:
#5a7381;'><tr><td></td></tr></table></div>");
      }
```



```
   /* Кольори для розфарбовування графіків */
   var c = new Array ("ff0000","0000ff","009900",
"b600b6","3399cc","8800ff","12be8f","fb1da1","c8a283",
"f26521")

   if (m < n)   { var nn = m; m = n; n = nn; }
   if (x2 < x1)  { var xx = x2; x2 = x1; x1 = xx; }

   var Posx = 50;
   var Posy = koeff * 100 + 50;
   var y = x = 0;
   var yJ = xJ = 0;
   var y1 = y0 = Posy;

   var Bessel0 = Bessel = 0;
   var DimY0 = DimY = 1;

   var r = j1 = j = i = 0;
   var Maxx = Math.floor((x2 - x1) * step * koefg);

   /* Побудова графіка */
   for (j = n; j <= m; j++)
      {
      j1 = j - n;
      while (j1 > 9) j1 = j1 - 10; /* колір графіка */

      xJ = j1 * 90 + Posx;
      yJ = Posy * 2 + (j - n - j1) * 3;

      /* назва функції вибраним кольором */
      MsgBox.document.writeln("<div style='color:
#",c[j1],"; top: ",yJ,"px; left: ",xJ,"px; height:
50px;'>J<sub>",j,"</sub>(x)</div>");

      DimY = 1;
      Bessel0 = NNBessel(x1,j,eps);
      Bessel = NNBessel(x1 + 1 / step,j,eps);
      if (Bessel0 < Bessel) r = 1; else r = -1;

      y0 = Posy - Math.round(Bessel0 * step * koeff);
      y = Posy - Math.round(Bessel * step * koeff);
      x = Posx + x1 * step;

      /* рядок стану */
      MsgBox.document.writeln('<script type="text/
javascript">window.status=("Виконується ітерація
для індексу n = '+j+' і аргументу x = '+x1+' !!
")</'+'script'+'>');
```

```
      MsgBox.document.writeln("<div style='top:
",y,"px; left: ",(x - x10 * 100),"px;'><table
cellpadding='0' cellspacing='0' style='width:
1px; height: ",DimY,"px; background-color:
#",c[j1],";'><tr><td></td></tr></table></div>");

      DimY0 = DimY; y0 = y;
      if (Bessel0 < Bessel) r = 1; else r = -1;

      for (i = 1; i <= Maxx; i++)
        {
        x = i / (step * koefg) + x1;
        /* виклик обчислення значення функції */
        Bessel = NNBessel(x,j,eps);
        if (Bessel0 < Bessel) r = 1; else r = -1;

        x = Math.round (x * step) / step;
        MsgBox.document.writeln('<script type="text/
javascript">window.status=("Виконується ітерація
для індексу n = '+j+' і аргументу x = '+x+' !!
")</'+'script'+'>');
        x = Posx + i + x1 * step;
        x = Math.round(x);
        y = Posy - Math.round(Bessel * step * koeff)

        DimY = 1;
        if (r > 0)
          { if (y0 > (y + 1)) DimY = y0 - y; y1 = y; }

          else  { if (y0 < (y + 1)) DimY = y - y0;
          y1 = y - DimY; }

        /* Виведення 1px фрагмента графіка функції */
        MsgBox.document.writeln("<div style='top:
",y1,"px; left: ",(x - x10 * 100),"px;'><table
cellpadding='0' cellspacing='0' style='width:
1px; height: ",DimY,"px; background-color:
#",c[j1],";'><tr><td></td></tr></table></div>");

        DimY0 = DimY; y0 = y; Bessel0 = Bessel;
        }
      }

      /* Закриття веб-сторінки в новому вікні */
      MsgBox.document.writeln("</body></html>");
      MsgBox.document.close();
   }
   /* закінчення тексту функції виведення графіка */
```



```
function NNBessel(x,n,eps)
/* скопіювати текст функції із стор. 126-127 */
/* на цьому місці може бути будь-яка інша функція */

</script>
</head>
<body>
<!-- Початок отрисовки форми запиту -->
<form method="post" name="form5" id="form5">

Функції Беселя індексу від <input type="text"
name="index" id="index" style="width: 50px; height:
22px; border:#5a7381 1px solid;"> до <input
type="text" name="index1" id="index1" style="width:
50px; height: 22px; border:#5a7381 1px solid;">

<br />Інтервал змінної від <input type="text"
value="0" name="iks1" id="iks1" style="width: 50px;
height: 22px; border:#5a7381 1px solid;"> до <input
type="text" name="iks2" id="iks2" style="width: 50px;
height: 22px; border:#5a7381 1px solid;"> одиниць

<br />Коефіцієнт розтягування графіка по вертикалі
<input type="text" value="1" name="koeff" id="koeff"
style="width: 50px; height: 22px; border:#5a7381 1px
solid;">

<br />Коефіцієнт розтягування графіка по горизонталі
<input type="text" value="1" name="koefg" id="koefg"
style="width: 50px; height: 22px; border:#5a7381 1px
solid;">

<br /><br />Вводимі величини індексу приводяться до
цілих ненегативних значень
<br />В базовому варіанті 1 одиниця = 100 px,
точність обчислень  <input type="text" value="1E-6"
name="eps" id="eps" style="width: 50px; height: 22px;
border:#5a7381 1px solid;">

<br /><br /><input type="button" value="Графік Фнк.
Беселя" onClick="GraphBessel()" style="width: 180px;
height: 22px; border:#5a7381 1px solid;">

</form>
</body></html>
```

Можна відзначити, що велику частину тексту програми займає оформлення виводу математично точного і коректного (по-точечного) графіка функцій в середовищі, де відсутні графічні та векторні засоби.

Таким чином можна виводити на монітор комп'ютера таблиці та графіки засобами JavaScript — досить змінити виділений фрагмент тексту функції математичного розрахунку. У тілі самої функції квадратною дужкою помічений фрагмент, який необхідно змінити, якщо потрібно обчислити значення яких-небудь інших функцій з іншими розкладеннями в ряд. Програми носять модульний характер, тому надалі приводитимуться тільки окремі фрагменти, що підлягають заміні.

Програма 2. *Обчислення значень функцій Беселя при довільних значеннях індексу на базі раніше отриманого розкладення в ряд*

$$J_{\mp\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\mp\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(\mp\nu + k + 1)} \tag{2.5.7}$$

Вважатимемо, що при цілих негативних значеннях індексу виконується наступна рівність:

$$J_{\nu}(x) = -J_{-\nu}(x) \quad \nu \text{ — ціле ненегативне число}$$

Відповідно до (2.5.8) початковий член ряду розкладення функцій Беселя обчислюється за формулою:

$$a_0 = \left(\frac{x}{2}\right)^{\mp\nu} \frac{1}{\Gamma(\mp\nu + 1)} \tag{4.2.3}$$

Кожен подальший член цього ряду може бути обчислений відповідно до рекурентного відношення:

$$a_k = a_{k-1} \frac{(-1)\,(x/2)^2}{k\,(\mp\nu + k)} \tag{4.2.4}$$

Для правильних обчислень і розрахунку початкового (нульового) значення ітерації буде потрібно обчислення значення Гамма-функції Ейлера.

Застосування чисельних методів для розрахунків значень Гамма-функції Ейлера має специфіку у зв'язку з тим, що поблизу нуля та цілих негативних чисел Гамма-функція Ейлера має неусувні особливості та терпить неусувний чисельними методами розрив, спрямовуючись на безкінечність.

Відповідно, і значення Гамма-функції не можуть бути отримані шляхом чисельних методів не тільки у вказаних особливих крапках, але і в їх найближчому околі. В той же час при натуральних значеннях змінної Гамма-функція Ейлера перетворюється на звичний факторіал, розширенням якого вона є.

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{4.2.5}$$

З цього виходить, що для коректного застосування чисельних методів при значеннях індексу функції Беселя, близьких до цілих негативних чисел, функції Беселя необхідно замінювати на відповідні целочисельні функції Неймана, обчислення яких складніше і буде розглянуто в наступному параграфі.

Функції Беселя із значеннями індексами поблизу нуля необхідно замінювати на функції Беселя з нульовим індексом. Функції Беселя із значеннями індексу поблизу натуральних чисел необхідно замінювати на функції Беселя з натуральним індексом і саме для них явно використовувати класичні функції Беселя з натуральним індексом, перевірені й стійкі програми їх обчислень та ряди, що добре сходяться.

Для програмного обчислення значень Гамма-функції Ейлера використовується її базове подавання у вигляді невласного інтеграла (Ейлерова інтеграла 2 роду).

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \qquad \text{где } x > 0 \tag{4.2.6}$$

Для обчислення значення цього інтеграла використаємо кінцеві суми Дарбу і кінцевий інтервал. Запишемо наступне кінцеве подавання:

$$\Gamma(x) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ dt \to 0}} \sum_{k=1}^{n} e^{-t_k} t_k^{x-1} dt \qquad \text{де } t_k = k\,dt \text{ й } x > 1 \tag{4.2.7}$$

Однією з основних властивостей Гамма-функції Ейлера є фундаментальне відношення:

$$\Gamma(x+1) = x\ \Gamma(x) \tag{4.2.8}$$

$$\Gamma(x-1) = \Gamma(x) / (x-1) \tag{4.2.9}$$

Завдяки цій фундаментальній властивості можна обчислити значення функції при негативних значеннях змінної, зробивши відповідну поправку.

```
<script type="text/javascript">
function GammaFunction(x)
{
  var n = 1000; /* ітерації не збільшувати */
  var dt = 1E-1; /* крок ітерацій не збільшувати */
  var Emin = 1E-3; /* погрішність відхилення */
  var flag = 0; /* приналежність до області збіжності */
  var i = ss = s = 0;
  var xr = Math.round(x);

  /* близько до негативних цілих чисел і нуля */
  if ((Math.abs(x - xr) < Emin) && (x < dt)) return s;

  /* приведення до області хорошої збіжності */
  while (x < 4)
      { flag = ++flag;  /* flag = flag + 1 */
      x = ++x;          /* x = x + 1 */
      }
   /* обчислення суми Дарбу для інтеграла Ейлера */
  var ti = 0;
  xr = x - 1;
  for (i = 1; i <= n; i++)
      { ti = i * dt;
      s = s + dt * Math.pow(ti,xr) * Math.exp(-ti);
      }
  /* обчислення на області поганої збіжності */
  while (flag > 0)
     { x = --x;       /* x = x - 1 */
     flag = --flag;   /* flag = flag - 1 */
     s = s / x;
     }
  return s;
}
</script>
```


Поблизу негативних цілих чисел програма обчислень повертає нуль, оскільки функція на цій множині чисельними методами не визначена.

Примітно, що негативні значення Гамма-функції Ейлера, які обчислюються за цим алгоритмом, містять відносно високі погрішності. В околі нуля погрішності ще вищі. При великих негативних значеннях обчислення за цим алгоритмом втрачає сенс, оскільки графік функції нагадує букву П.

Якнайкраща збіжність спостерігається на області значень змінної (4..5), найгірша — біля одиниці та при великих значеннях змінної. При значеннях менше одиниці формулу використовувати не можна — змінну потрібно спочатку привести спочатку до області збіжності.

Хороша стійкість програми спостерігається тільки при невеликих позитивних значеннях змінної, що перевищують значення 3, але краще всього цей алгоритм сходиться, починаючи з 4. В цьому випадку можна обмежитися порівняно невеликим числом ітерацій. Тому обчислення в ряд в цій програмі починаються з числа 4, а всі менші значення приводяться за формулою (4.2.9).

Наведений алгоритм є таким, що розходиться, тобто при зростанні числа ітерацій `n` і зменшенні кроку `dt` не спостерігається помітне поліпшення результатів обчислень на 32-розрядних прикладках. Більш того, результат може погіршитися, а час роботи ПК — зростає аж до повного блокування роботи програми (при перевищенні кожного з вказаних параметрів більш ніж в 100 разів).

Приведені параметри `n` та `dt` були виявлені дослідним шляхом, вони забезпечують дуже швидкий і максимально точний розрахунок складного алгоритму, який надалі використовується і для обчислення значень функцій Беселя з нецілим індексом, і для розрахунку другого лінійно-незалежного розв’язку рівняння Беселя — функцій Неймана довільного індексу.

Для зручності можна вивести значення Гамма-функції Ейлера у формі таблиці, які були обчислені за допомогою цього алгоритму без округлень і поправок. Час обчислень і виводу на монітор на комп’ютері середньої потужності — всього декілька секунд.

Хоча обчислення Гамма-функції Ейлера і відповідно узагальненого функціонала включено в ряд математичних пакетів, автор визнала необхідним детально розібрати алгоритм обчислень і показати на прикладах його особливості в стандартних 32-розрядних програмах.

Приведемо алгоритм і програму обчислень значень функцій Беселя з довільним індексом, зокрема нецілим і негативним.

```
<script type="text/javascript">
function Bessel(x,ind,eps)
{
   var Emax = 1E-12; /* максимальна погрішність */
   var Emin = 1E-6; /* мінімальна погрішність */

   if (x == null)  x = 0;      /* змінна */
   if (ind == null)  ind = 0;  /* індекс функції */
   if (eps == null)  eps = Emin;
   eps = Math.abs(eps);

   /* далі виправлення і корекція заборонені */
   if (eps > Emin)  eps = Emin;    /* виправлення  */
   if (eps < Emax)  eps = Emax;
   x = Math.abs(x);

   var ak = 1; /* змінні ітерації */
   var s = 0; /* змінні - сума ряду */
   var до = 0; /* нумерація членів ряду */
   var i = 1;

   /* близькість індексу до цілих чисел */
   var indr = Math.round(ind);
   if (Math.abs(ind - indr) < Emin)
            { s = NNBessel(x,indr,eps);
            if (ind < 0) s = -s;
            return s;
            }

   /* виклик Гамма-функції Ейлера */
   var gamma = GammaFunction(ind+1);

   /* обчислення нульового члена ряду */
   ak = Math.pow((x/2),ind) / gamma;
```



```
   /* обчислення ряду із заданою погрішністю */
   while (Math.abs(ak) > eps)
   {
      s = s + ak;
      k = k + 1;
      ak = (-1) * ak * x * x / (4 * k * (ind + k));
   }

   /* виправлення погрішності та расходимости */
   if (Math.abs(s) < Emax)  s = 0;
   if (Math.abs(s) > 1)  s = 0;

   /* повернення отриманого значення суми ряду */
   return s;
}
</script>
```

Приведений алгоритм використовує пряме обчислення значень функцій Беселя в малому околі цілих значень індексу. Це забезпечує істотне підвищення точності при обчисленнях найбільш популярних в практичних застосуваннях функцій.

На практиці часто доводиться стикатися з обчисленнями значень функцій Беселя з цілим ненегативним індексом або індексами, дуже близькими до цілих. Цим можна обмежитися, якщо немає особливостей.

У разі особливостей і необхідності використовувати другий незалежний розв'язок рівняння Беселя з цілим значенням індексу програма видає лінійно-залежне розв'язок, що відрізняється тільки на знак. Тому в цьому випадку математичні розрахунки вимагають обов'язкового обчислення значень функцій Неймана, які будуть розглянуті в наступному параграфі.

Незважаючи на те, що програма дозволяє легко обчислювати значення функцій Беселя при негативних нецілих значеннях індексу, використовувати ці значення як елемент розкладення за другим лінійно-незалежним розв'язком рівняння Беселя на практиці не рекомендується. При побудові точних математичних моделей складних процесів із особливостями функції Беселя з негативним значенням індексу не забезпечують коректність моделювання фізичних процесів.

§ 3. Програмне обчислення функцій Неймана

У спеціальній літературі функціям Неймана приділяється значно менше увага, ніж функціям Беселя, які створюють перший лінійно-незалежний розв'язок рівняння Беселя.

В прикладних завданнях функції Неймана найчастіше грають допоміжну роль, дозволяючи коректніше моделювати фізичні процеси, пов'язані з хвилями, коливаннями, вигином, міцністю, нагріванням, охолодженням та ін., в околі наявних особливостей.

У ряді анотацій до стандартних математичних пакетів функції Неймана автори закликають використовувати тільки в крайніх випадках, якщо без них неможлива побудова коректної математичної моделі. У деяких пакетах програми обчислень функцій Неймана й зовсім відсутні.

Це пов'язано в першу чергу з пережитками комп'ютерної ери середини і кінця XX століття, коли обчислення були пов'язані з об'єктивними факторами — малим парком реальних ЕОМ, дорогим і обмеженим машинним часом, низькою розрядністю більшості прикладків, малою швидкістю виконання програм, складністю зберігання даних на носіях і так далі

Проблеми були майже повністю усунені вже на початку XXI століття, коли реальні математичні розрахунки для більшості прикладних задач стало можливо проводити на персональних комп'ютерах середньої потужності. Адже ще якихось 40-50 років тому назад для таких розрахунків здійснювалися найпотужніші ЕОМ класу ЄС.

Істотною проблемою виявилося те, що більшість прикладних програм і алгоритмів були написані на мові Фортран, який на персональних комп'ютерах використовується вкрай рідко, а доступні бібліотеки програм поки мало поширені, та їх створення реальне.

В світлі науково-технічного прогресу проблема й складність обчислень функцій Неймана виявляється вже не такою й гострою — приведені далі в цьому параграфі програми дозволяють виконати розрахунки на персональному комп'ютері в стандартних інтернет-програмах. Перед цим зробимо невеликий відступ.

У зв'язку з НТП автора зацікавила можливість використання функцій Неймана як таковиx, без залучення класичних функцій Беселя, для коректного математичного моделювання екстраординарних або незвичайних фізичних процесів, в т.ч. не розгаданих.

Історично так склалося, що циліндрові функції і зокрема функції Неймана спочатку розроблялися в теорії як цікавий математичний апарат, і тільки потім вони знайшли своє широке застосування у сфері прикладних обчислень та коректного комп'ютерного математичного моделювання.

Функції Неймана майже на всій області визначення (тобто майже на всій позитивній числовій піввісі) поводяться практично так само, як і класичні функції Беселя. Якісною відмінністю є їхня поведінка поблизу нуля, де функції Неймана різко спрямовуються на безкінечність і терплять неусувний розрив.

Більш того, в малому околі нуля отримання значень функцій Неймана чисельними методами неможливе. Ця особливість раніше створювала складнощі практичного застосування функцій Неймана, оскільки потрібно було виключати з розгляду деякий окіл нульового значення змінної і проводити багато обчислень.

Однією з характерних особливостей XXI століття є бурхливий розвиток технологій тривимірної комп'ютерної візуалізації та перенесення цих технологій на персональні комп'ютери. Завдяки цьому на комп'ютерах стало можливим зобразити практично будь-який процес, зокрема й той, що не існує в природі. З візуальної точки зору картинка і відеоряд виглядає реалістичною і псевдоправдоподібною.

Автор має деякий досвід роботи в тривимірних комп'ютерних програмах, призначених для 3D візуалізації об'єктів. Ці пакети мають щонайширший спектр можливостей комп'ютерного візуального моделювання і реалістичного зображення практично всього, чого завгодно. Тривимірна модель будується, виходячи в першу чергу із загальної естетики і привабливого дизайну.

Сучасні комп'ютерні фахівці створюють дуже наочні та красиві комп'ютерні моделі різних природних явищ, зокрема для масштабних фільмів-катастроф і художньо-документальних фільмів.

Основне завдання цих моделей — справити емоційне враження на глядачів і створити у них ефект присутності та емоційного потрясіння, що забезпечує комерційний успіх і високі касові збори.

Абсолютно не істотно, що ці явища в природі виглядають не так, як у художньому відеоряду — у фільмів зовсім інше завдання. На екрані можуть ожити неіснуючі торнадо, смерчі та цунамі, які на документальних фотографіях і на зйомках очевидців виглядають набагато простішими, прозаїчнішими й взагалі — інакшими.

Тому стоїть серйозна проблема побудови коректної математичної моделі ще не змодельованих складних природних процесів або створення для ряду процесів більш ефективних математичних моделей.

Одне з таких складних для прикладного моделювання явищ — цунамі. На сьогодні розроблений якісний математичний апарат загальної теорії хвиль, тому на комп'ютері сталі можливі візуально-коректні отрисовки хвильових процесів, зокрема — будь-яких хвиль на поверхні океану і прибережних хвиль.

У популярних фільмах-катастрофах цунамі візуально моделюють як дуже велику або навіть гігантську потужну хвилю, яка піднімається вгору і змітає все на своєму шляху. Прообразом цієї моделі послужили прибережні хвилі на тропічному узбережжі, але це справляє величезне враження на екрані та притупляє відчуття небезпеки при наближенні реального цунамі.

Проте цунамі — це не хвиля в звичному розумінні. Цунамі не піддається опису класичних хвильових законів і процесів, хоча моделюється зокрема класичним хвильовим рівнянням.

Цунамі — це реалізована в природі особливість хвильових процесів, так звана водна океанічна ударна хвиля, яка не має нічого спільного із звичайними (нехай навіть і дуже сильними) штормовими хвилями.

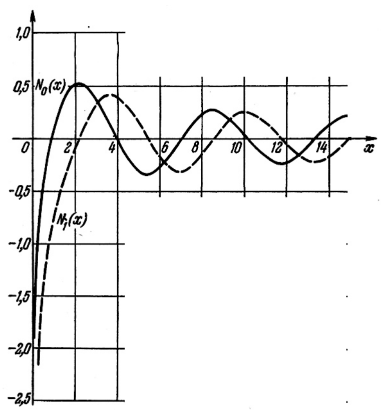
У теорії будь-яка ударна хвиля описується відповідно не гладкими коливальними функціями, а функціями стрибка та дельта-функцією. Основною складністю є побудова прикладних апроксимацій цих функцій для даного природного катаклізма.

Цунамі черпає енергію не в русі повітряних мас у поверхні океану, а в силі землетрусів, викликаних постійними підсовуваннями плит літосфери.

Американський континент постійно дрейфує у бік Азії приблизно на 15-20 см в рік, утворюючи в земній корі зони деформацій, розривів і сжатій. Виникають землетруси, вивільняючи цю гігантську енергію. Дрейф здійснюється під дією колосальної рушійної сили — енергії обертання Землі навколо своєї осі.

У океані вивільнена енергія Землі розповсюджується глобальніше, ніж порівнянні з штормові хвилі, що носять локальний характер, створюючи так звані приливні хвилі або цунамі, які необхідно розглядати як глобальний процес, що відбувається на нашій планеті.

Для математичного моделювання поведінки цунамі та його апроксимації автор пропонує використовувати функції Неймана як вони є, оскільки вони мають характерну для ударної хвилі неусувну особливість, локалізовану в малій околі.



Графіки функцій Неймана $N_0(x)$ та $N_1(x)$

У разі величезних енергій, великих швидкостей розповсюдження хвильових коливань виникають розриви безперервності в розподілі тиску, швидкості, щільності та інших величин. Ці розриви прийнято називати ударними хвилями. Але на поверхні розриву (фронті ударної хвилі) повинні виконуватися умови безперервності самого потоку речовини, енергії і кількості руху (умови Гюгоніо).

Тобто з фізичної точки зору процес залишається безперервним, а розрив терплять лише функції математичної моделі.

Аномалії поведінки цунамі виявляються тільки на границі океану (зони розповсюдження цунамі) — на океанічному дні, узбережжі та поблизу берега, якого досягнуло цунамі.

Руйнівні прояви цунамі починаються на океанічному шельфі. Саме там відбувається утворення ударної хвилі. В океані ж цунамі виглядає як величезна полога хвиля заввишки близько метра, що не представляє небезпеки для надводного судноплавства.

Ще одним цікавим з погляду математичного моделювання та не менш руйнівним природним явищем є смерчі, торнадо й тропічні тайфуни, що мають характерну воронкоподібну форму.

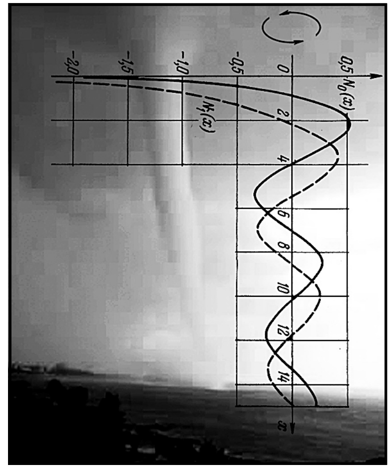
Вони постійно привертають до себе увагу дослідників і теоретиків. Свою енергію вони черпають від енергії випромінювання могутньої зірки — Сонця, і несуть в собі також енергію обертання Землі.

Смерч (торнадо) — атмосферний вихор, що виникає в грозовій хмарі та розповсюджується вниз, часто до самої поверхні Землі у вигляді темного хмарного рукава або хобота діаметром в десятки і сотні метрів. Існує недовго, переміщаючись разом із хмарою.

Водяні смерчі — це стовпи вологого повітря, що піднімається та обертається, які зазвичай утворюються над теплою водою. Вони можуть бути так само небезпечні, як і торнадо, швидкість вітру в них може сягати 200 кілометрів за годину. Часто водяні смерчі не пов’язані з грозами і виникають навіть при порівняно гарній погоді.

У центральній частині смерчу тиск повітря знижений. Ззовні смерч представляється таким, що опускається вершиною до землі конусоподібним хмарним стовпом або хоботом. Від поверхні землі до нього часто піднімається вершиною вверх інший стовп — із пилу, сміття або водяних бризок. Діаметр стовпа декілька десятків метрів. Рух повітря і предметів, що втягуються до нього, — круговий, зі швидкістю до 100 км/год., а іноді й більше. Повітря в смерчі підіймається вгору по спіралі, здіймаючи за собою воду, пил і навіть різні предмети на величезну висоту.

При русі над місцевістю з швидкістю декілька десятків кілометрів на годину смерч проводить руйнування, які викликаються не тільки величезною швидкістю повітря всередині самого вихору, але й миттєвим стрибком атмосферного тиску, який за лічені секунди може впасти і знову піднятися на декілька десятків гектопаскалів. Дома вибухають у момент проходження над ними смерчу.



При побудові математичної моделі істотну роль відіграє правильний вибір системи координат та її орієнтації в просторі.

Якщо виключити дію оператора вигину на стовп торнадо, то двовимірна проекція смерчу близька до приведених на ілюстрації функцій Неймана.

Повітря обертається по спіралі, піднімаючись вгору. В двовимірній проекції це з високим ступенем точності нагадує абриси циліндрової функції Неймана, до якої доданий оператор обертання навколо центру не зігнутого торнадо. Це дозволяє зробити припущення про те, що смерчі можуть бути з високим ступенем точності та реалізму змодельовані з використанням саме спеціальних функцій Неймана як основного елементу розкладення.

Короткий огляд цих двох прикладів показує, що функції Неймана відіграють не менш істотну роль в математичному моделюванні, ніж класичні функції Беселя, і тому їм повинна приділятися не менша увага, ніж іншим спеціальним функціям.

Функції Неймана здатні відігравати не тільки допоміжну, але й провідну роль в математичному моделюванні різних процесів, зокрема таких, що носять аномальний або парадоксальний характер.

Для того, щоб полегшити процес обчислення чисельних значень функцій Неймана, приводимо алгоритм і програму, написану на мові JavaScript.

Для нецілих значень індексу функції Неймана можуть бути обчислені за відомою формулою:

$$\mathcal{N}_\nu(x) = (J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)) \;/\; \sin\nu\pi$$

для нецілих значень $\nu \geqslant 0$ (4.3.1)

Програма 3. *Обчислення значень функцій Неймана при нецілих значеннях індексу на базі раніше отриманого розкладення в ряд функцій Беселя*

$$J_{\mp\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\mp\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k} (x/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(\mp\nu + k + 1)} \qquad (2.5.7)$$

Відповідно до (3.3.1) початковий член ряду розкладення функцій Неймана обчислюється за формулою:

$$a_0 = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \cos\nu\pi \;/\; \sin\nu\pi \qquad (4.3.2)$$

$$b_0 = -\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)} \;/\; \sin\nu\pi$$

Кожен подальший член цього ряду може бути обчислений відповідно до рекурентного відношення:

$$a_k = a_{k-1} \frac{(-1)\ (x/2)^2}{k\,(\nu+k)} \qquad (4.3.3)$$

$$b_k = b_{k-1} \frac{(-1)\ (x/2)^2}{k\,(-\nu+k)}$$

$$\mathcal{N}_{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k + b_k \quad \text{для нецілих} \quad \nu \geqslant 0 \qquad (4.3.4)$$

Для правильних обчислень і розрахунку початкового (нульового) значення ітерації буде потрібно обчислення значення Гамма-функції Ейлера, приведене на стор. 144. Запишемо програму обчислень на мові JavaScript.

```
<script type="text/javascript">
function Nejman(x,ind,eps)
{
   var Emax = 1E-12; /* максимальна погрішність */
   var Emin = 1E-6; /* мінімальна погрішність */

   if (x == null)  x = 0;         /* змінна */
   if (ind == null)  ind = 0.5;   /* індекс */
```



```
   if (eps == null)  eps = Emin;
   eps = Math.abs(eps);
   var Xmax= 50;      /* максимально допустимий x */

   /* далі виправлення і корекція заборонені */
   if (eps > Emin)  eps = Emin;    /* виправлення */
   if (eps < Emax)  eps = Emax;
   x = Math.abs(x);

   var ak = bk = 1; /* змінні ітерації */
   var s = 0; /* змінні - сума ряду */
   var до = 0; /* нумерація членів ряду */
   var i = 1;

   /* небезпечна близькість змінної x до нуля */
   if (x < Emin) return s;

   /* близькість індексу до цілих чисел */
   var indr = Math.round(ind);
   if (Math.abs(ind - indr) < Emin)
            { s = NNNejman(x,indr,eps);
            if (ind < 0) s = -s;
            return s;
            }

   /* обчислення нульового члена ряду */
   var pi = Math.PI;

   var gamma = GammaFunction(ind+1);
   ak = Math.pow((x/2),ind) / gamma * Math.cos(ind * pi)
 / Math.sin(ind * pi);

   gamma = GammaFunction(-ind+1);
   bk = Math.pow((x/2),-ind) / gamma / Math.sin(ind * pi);

   /* обчислення ряду із заданою погрішністю */
   while ((Math.abs(ak) > eps) || (Math.abs(bk) > eps))
   {
     s = s + ak + bk;
     k = k + 1;
     ak = (-1) * ak * x * x / (4 * k * (ind + k));
     bk = (-1) * bk * x * x / (4 * k * (-ind + k));
   }
```

```
   /* виправлення погрішності та расходимости */
   if (Math.abs(s) < Emax)  s = 0;
   if ((Math.abs(s) > 1) && (x > Xmax))  s = 0;

   /* повернення отриманого значення суми ряду */
   return s;
}
</script>
```

Приведена програма є нестійкою при великих значеннях модуля індексу (від 25 і вище) і великих значеннях змінної (орієнтовно від 50 та вище). Чим більше значення індексу і чим більше значення змінної, тим менш стійкою є програма.

У малому околі нуля значення функції також не визначене у зв’язку з наявністю неусувної особливості та наближенню значення функції до безкінечності.

Очевидно, що приведена вище програма дуже схожа з програмою обчислення значень функцій Беселя довільного індексу і була написана на її основі.

Але ця програма і використаний в ній алгоритм не призначені для обчислення значення функції Неймана з цілим ненегативним індексом.

Цілі значення індексу циліндрових функцій найчастіше застосовуються в практичному математичному моделюванні процесів з особливостями. В той же час обчислення значень функцій Неймана з цілочисельними індексами представляє найбільші складнощі. Ще 50 років тому ці обчислення могли бути виконані на обмеженому парку ЕОМ з великою витратою машинного часу.

Програма обчислень цих значень окремо викликається в тілі з ім’ям **NNNejman** і приводиться нижче. Її обов’язково потрібно включити в тіло веб-сторінки разом з програмою обчислення значень функцій Беселя з цілочисельними значеннями індексу **NNBessel**.

Програма 4. *Обчислення значень функцій Неймана при цілих ненегативних значеннях індексу проводиться на підставі достатніх складних формул і громіздких представлень у вигляді рядів. Складність обчислень сприяє накопиченню погрішностей.*

Функції Неймана для цілого індексу в загальному випадку мають вид наступного складного ряду:

$$\mathcal{N}_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)!}{(k-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k-2} - \qquad (2.6.6)\ (4.3.5)$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k!(k+n)!}\left(\sum_{m=1}^{n+k}\frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\right)$$

де C — постійна Ейлера, наближене значення якої складає 0,577 215 664 901 532 5...

Алгоритмізації підлягає обчислення трьох основних типів рядів, які присутні в даній формулі. Оцінці погрішності підлягає залишковий член останнього ряду, оскільки перші два ряди є кінцими. Наприкінці обчислень буде проведено ділення підсумкової суми на константу p. Для обчислень додатково потрібний виклик розрахунку функції Беселя з цілим індексом.

$$a_1 = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n}(n-1)! \text{ або } 0 \text{ при } n=0 \qquad (4.3.6)$$

$$a_k = a_{k-1}\frac{(n-k)}{(k-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$b_1 = -\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}\frac{1}{(1+n)!}$$

$$b_k = -b_{k-1}\frac{1}{k(k+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$c_k = \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m} \quad \text{и} \quad d_k = b_k\left(c_k + c_{n+k}\right)$$

На підставі цих рекурентних відношень можна записати алгоритм і програму обчислення функцій Неймана цілочисельного індексу.

```
<script type="text/javascript">
function NNNejman(x,n,eps)
{
   var Emax = 1E-12; /* максимальна погрішність */
   var Emin = 1E-6; /* мінімальна погрішність */

   if (x == null) x = 0; /* змінна */
   if (n == null) n = 0; /* індекс */
   if (eps == null) eps = Emin;
   eps = Math.abs(eps);

   /* далі виправлення і корекція заборонені */
   if (eps > Emin) eps = Emin; /* виправлення */
   if (eps < Emax)  eps = Emax;

   x = Math.abs(x);
   n = Math.abs(n);   /* округлення індексу */
   n = Math.floor(n);

   var ak = bk = ck = dk = 0;
   var s = sc = sa = sb = 0;  /* сума рядів */
   var k = m = 0;             /* нумерація */
   var i = 1;
   var nf = 1;
   var pi = Math.PI;
   var eiler = 5.772156649015325E-1;
   var c = new Array(0,1);

   /* небезпечна близькість змінної x до нуля */
   if (x < Emin) return s;

   /* обчислення факторіалу (n-1)! */
   for (i = 1; i < n; i++)   nf = nf * i;

   /* заповнення таблиці значень  c[k] */
   for (m = 2; m <= n; m++)
     { ck = c[m - 1] + 1 / m;
     /* додавання елементу ck в кінець таблиці */
     c.push(ck);
     };

   /* обчислення першого кінцевого ряду */
   if (n > 0) sc = -Math.pow((x / 2), n) / nf / n * c[n];
```



```
   /* початкові ітерації другого ряду */
   if (n > 0) sa = ak = Math.pow((x / 2), -n) * nf;

   /* обчислення другого кінцевого ряду */
   for (k = 1; k <= n; k++)
     { ak = ak * (n - k) * x * x / 4 / (k - 1);
     sa = sa + ak;
     }

   /* початкові ітерації третього безкінечного ряду */
   ck = c[n] + 1 / (n + 1);
   c.push(ck);
   k = 1;
   bk = -Math.pow((x / 2),(n + 2)) / nf / n / (n + 1);
   sb = dk = bk * (c[1] + c[n + 1]);

   /* обчислення третього безкінечного ряду */
   while (Math.abs(dk) > eps)
     {
     k = 1 + k;
     ck = c[n + k - 1] + 1 / (n + k);
     c.push(ck);

     bk = -bk * x * x / 4 / k / (n + k);
     dk = bk * (c[k] + c[k + n]);
     sb = sb + dk;
     }

   /* кінцевий результат */
   s = (2 * NNBessel(x,n,(eps * 1E-1)) * (Math.log(x /
2) + eiler) - sc - sa - sb) / pi;

   /* виправлення погрішності та расходимости */
   var Xmax = 50;
   if (Math.abs(s) < Emax)  s = 0;
   if ((Math.abs(s) > 1) && (x > Xmax))  s = 0;

   /* повернення отриманого значення суми ряду */
   return s;
}
</script>
```

Приведена програма є нестійкою при великих значеннях модуля індексу (від 25 і вище) і великих значеннях змінної (орієнтовно від 50 і вище). Чим більше значення індексу і чим більше значення змінної, тим менш стійкою є програма.

У малому околі нуля значення функції також не визначене у зв'язку з наявністю неусувної особливості та прагненню значення функції до безкінечності, тому приведена функція приймає нульове значення.

По аналогії з попереднім параграфом для функцій Неймана можна створити програми побудови таблиць із заданими інтервалами параметрів, а також програми візуалізації їх графіків на моніторі комп'ютера.

Для представлення поведінки циліндрових функцій великих індексів у віддаленні від початку координат на практиці найчастіше використовуються наступні асимптотичні подавання, які дозволяють зробити приблизні розрахунки з вказаним ступенем точності:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \nu\pi/2 - \pi/4\right) + \mathrm{O}\left(x^{-3/2}\right)$$

$$\mathcal{N}_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \nu\pi/2 - \pi/4\right) + \mathrm{O}\left(x^{-3/2}\right)$$

Асимптотична формула демонструє характер коливань циліндрових функцій у віддаленні від початку координат, але для практичних обчислень і чисельних методів використовується надзвичайно рідко. Формули носять швидше аналітичний і теоретичний характер.

Відповідно до отриманих таблиць значень функцій Неймана можна або побудувати графік в явному вигляді, або використовувати програми побудови графіків за дискретними табличними даними, що входять в стандартні пакети, у тому числі та офісні.

Очевидно, що використання апарату вбудованої в інтернет-програми мови JavaScript предоставляє значні зручності. Щоб уникнути проблем при розрахунках в опціях настройок браузеров потрібно дозволити виконання активних сценаріїв на веб-сторінках так, щоб спливаюче вікно безпеки не було заблоковане, або дозволяти виконання активних сценаріїв при кожному запуску програми (це менш зручно).

У Висновковому розділі викладемо основні переваги запропонованого програмного апарату. Всі приведені програми перевірені та працездатні. Вони доступні в мережі Інтернет для вільного скачування і викладені на веб-сайті автора за адресою **`http://www.mat.net.ua/jk`**

Програми дозволено безкоштовно скачувати і вільно використовувати для будь-яких прикладних розрахунків. Дозволено включати їх в інші пакети без додаткової націнки. Брати винагороду за розповсюдження цих програм і привласнювати авторство їх розробки заборонено. Приводимо основні переваги представленого в книзі та на веб-сайті автора прикладного програмного забезпечення.

1. Всі програми реалізовані на сучасній мові JavaScript, яка була розроблена і набула широкого поширення з кінця XX - початку XXI століття. Література, присвячена мові JavaScript, на сьогодні доступна (на відміну від ряда морально вже застарілих мов).

2. Для розрахунків не потрібна установка спеціальних компіляторів, оскільки використовується стандартне програмне забезпечення — інтернет-браузери для проглядання інтернет-сторінок, які розповсюджується зокрема вільно й безкоштовно. Найбільш оптимальним для високої швидкості розрахунків є безкоштовний браузер Mozilla Firefox, хоча використання саме його не обов'язково.

3. Програм розраховані на звичайні 32-розрядні програми і персональні комп'ютери стандартної і середньої конфігурації та потужності. Програми працюють дуже швидко й ефективно, що робить математичні обчислення доступними, а їх результати — переносимими в інші стандартні файли і програми, зокрема офісні програми.

4. Програми побудовані за модульним принципом. Програмний код відкритий, не зашифрований, зрозумілий, легко читається, розповсюджується вільно і може підлягати модифікації і доопрацюванню (зокрема перекладу в інші програмні коди, мови і прикладки).

5. Всі програми можна легально скачати з Інтернет-сайту розробника, оскільки вони служать популяризації сучасних комп'ютерних технологій, чисельних методів і нових прогресивних методів програмування в прикладній математиці та математичній фізиці.

Висновок

При вирішенні багатьох задач математичної фізики методом розділення змінних приходять до звичайного диференціального рівняння другого порядку, так званого рівняння Беселя. Характерними задачами, що приводять до циліндрових функцій, є краєві задачі однорідного диференціального рівняння в частинних похідних — а саме хвильове рівняння:

$$\Delta u + \mu u = 0 \tag{5.1}$$

ззовні або усередині круга (ззовні або усередині циліндра у разі трьох лінійно-незалежних змінних), а також кругові процеси в необмеженій області. Для даної задачі зручним виявляється введення полярних координат, в слідстві чого рівняння перетвориться до вигляду:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\mu u = 0 \tag{5.2}$$

Вважаючи $u(r,\varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)$, отримуємо:

$$R''\Phi+\frac{1}{r}R'\Phi+\frac{1}{r^2}R\Phi''+\mu R\Phi = 0 \tag{5.3}$$

Звідки слідує рівність:

$$\frac{R''+\frac{1}{r}R'+\mu R}{\frac{1}{r^2}R} = -\frac{\Phi''}{\Phi}\equiv\lambda \tag{5.4}$$

Ця рівність повинна виконуватися тотожно, тобто при всіх значеннях двох змінних. Оскільки ліва частина залежить тільки від r, а права — тільки від φ, це можливо, якщо права і ліва частина одночасно дорівнює одній і тій ж константі λ.

Інакше знайшлися б такі значення змінних, при яких рівність би не виконувалася.

Ми застосували метод розділення змінних, який в даному випадку виявився ефективним, і отримали пару звичайних диференціальних рівнянь.

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\left(\mu-\frac{\lambda}{r^2}\right)R(r) = 0 \tag{5.6}$$
$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi) = 0$$

Характер розв'язків цих рівнянь залежить від знаків постійних μ і λ. У задачах математичної фізики зазвичай розглядають такі розв'язки, які можна отримати при ненегативних значеннях λ.

При нульовому значенні μ розв'язок рівняння не виражається в циліндрових функціях, тому в даному виданні не розглядається. Ненульові значення μ були розглянуті в попередніх розділах.

Якщо $\lambda \geqslant 0$ й $\mu > 0$, тоді загальний розв'язок може бути записаний в наступному вигляді із замінами:

$$\lambda = \nu^2 \geqslant 0,\ \mu = k^2 > 0,\ x = kr$$

$$R''(x)+\frac{1}{x}R'(x)+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)R(x) = 0 \tag{5.7}$$
$$\Phi''(\varphi)+\nu^2\,\Phi(\varphi) = 0$$

$$u(r,\varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi) = \left(a_1\cos(\nu\varphi) + \right.$$
$$\left. + a_2\sin(\nu\varphi)\right)\left(a_3 J_\nu(kr)+a_4\mathcal{N}_\nu(kr)\right)$$

де $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ — довільні константи. Їх значення залежить від конкретних краєвих умов задачі.

У разі розв'язання хвильового рівняння, що має радіальну (циліндрову) симетрією, ми отримуємо рівняння Беселя нульового порядку (з нульовим індексом).

Якщо $\lambda = \nu^2 = 0$, тоді ми отримуємо наступні відношення і розв'язок:

$$\Phi(\varphi)\equiv \text{const}$$

$$u(r,\varphi) = a_3 J_0(kr)+a_4\mathcal{N}_0(kr)$$

Метод розділення змінних привів нас до отримання розв'язків хвильового рівняння і рівняння Лапласа, вираженого тригонометричними і циліндровими функціями.

Якщо $\lambda \geqslant 0$ й $\mu < 0$, тоді загальний розв'язок може бути записаний в наступному вигляді із замінами:

$$\lambda = \nu^2 \geqslant 0, \ \mu = -k^2 < 0, \ x = kr$$

$$R''(x) + \frac{1}{x}R'(x) - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)R(x) = 0 \qquad (5.8)$$

$$\Phi''(\varphi) + \nu^2 \Phi(\varphi) = 0$$

$$u(r, \varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi) = \left(a_1 \cos(\nu\varphi) + \right.$$

$$\left. + a_2 \sin(\nu\varphi)\right)\left(a_3 \mathcal{I}_\nu(kr) + a_4 \mathcal{K}_\nu(kr)\right)$$

де a_1 a_2 a_3 a_4 — довільні константи. Їх значення залежить від конкретних краєвих умов задачі.

Якщо $\lambda = \nu^2 = 0$, тоді ми отримуємо наступні відношення і розв'язки:

$$\Phi(\varphi) \equiv \text{const}$$

$$u(r, \varphi) = a_3 \mathcal{I}_0(kr) + a_4 \mathcal{K}_0(kr)$$

У задачах математичної фізики розглядають такі розв'язки хвильового рівняння, які описують коливальні процеси. Це можливо лише в тому випадку, коли постійна μ строго позитивна. У решті випадків розв'язок рівняння необмежено зростає і не описує коливальні процеси.

Крім того, в задачах математичної фізики часто розглядаються процеси, що залежать від часу, які можна представити диференціальним рівнянням

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (5.9)$$

Зробимо заміну $u(r, \varphi, t) = R(r)\,\Phi(\varphi)\,T(t)$

На першому етапі розділення змінних представимо вираз у вигляді $u(r, \varphi, t) = F(r, \varphi)\,T(t)$ та отримаємо:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \mu F = 0 \qquad (5.10)$$

$$T''(t) + \mu c^2 T(t) = 0$$

Для рівняння (5.10) розв'язок в загальному вигляді був отриманий вище. Розв'язком рівняння відносно змінної часу є тригонометричні функції. Звідси

$$\lambda = \nu^2 \geqslant 0, \ \mu = k^2 > 0, \ x = kr \qquad (5.11)$$

$$u(r, \varphi, t) = \left(a_1 \cos(kct) + a_2 \sin(kct)\right) \bullet$$

$$\left(a_3 \cos(\nu\varphi) + a_4 \sin(\nu\varphi)\right)\left(a_5 J_\nu(kr) + \right.$$

$$\left. + a_6 \mathcal{N}_\nu(kr)\right)$$

де a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 — довільні константи. Їх значення залежить від конкретних краєвих умов задачі. Особливістю рівняння є те, що час відповідно до фізичних реалій не може набувати значення константи. Функції, що необмежено зростають за часом, не можуть задовольнити хвильовому рівнянню через фізичну специфіку хвильових процесів, схильних до поступового згасання, а не зростання.

У задачах математичної фізики вивчається рівняння Лапласа, яке може бути представлено в циліндрових координатах в наступному вигляді:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (5.12)$$

Зробимо заміну $u(r, \varphi, z) = R(r)\,\Phi(\varphi)\,Z(z)$

На першому етапі розділення змінних представимо вираз у вигляді $u(r, \varphi, z) = F(r, \varphi)\,Z(z)$ та отримаємо:

$$Z''(z) - \mu Z(z) = 0$$

Розв'язком рівняння щодо третьої змінної координат є аналітична функція експоненти.

$$\lambda = \nu^2 \geqslant 0, \ \mu = k^2 > 0, \ x = kr \qquad (5.13)$$

$$u(r, \varphi, z) = \left(a_1 \exp(kz) + a_2 \exp(kz)\right) \bullet$$
$$\left(a_3 \cos(\nu\varphi) + a_4 \sin(\nu\varphi)\right)\left(a_5 J_\nu(kr) + \right.$$
$$\left. + \ a_6 \mathcal{N}_\nu(kr)\right)$$

Виписані рівняння задовольняють рівнянню (5.12) при довільних значеннях постійних, які залежать від краєвих умов задачі.

Одна із перших задач, які привели до розгляду функцій Беселя, є задача про коливання круглої мембрани, яка жорстко закріплена по краях. У полярних координатах вона задовольняє рівнянню (5.9).

У початковий момент часу мембрана отримує задане початковими умовами відхилення і швидкість, що описуються краєвими умовами:

$$u(r, \varphi, t)\Big|_{t=0} = f(r, \varphi) \ \text{— відхилення} \qquad (5.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = w(r, \varphi) \ \text{— швидкість}$$

Мембрана — пружна кругла пластинка, закріплена на краях. Має радіус r. Оскільки її края закріплені та не відхиляються, виникає ще одна додаткова умова:

$$u(r, \varphi, t)\Big|_{r=r_0} = 0 \ \text{— відхилень від краю немає.}$$

Загальний розв'язок рівняння описується (5.10), з якого потрібно виділити те, що може представляти розв'язок краєвої задачі (5.14).

1) По φ функція повинна бути періодичною, тому що зробивши повний оберт на кут $\varphi \sim 360°$, ми повернемося у ту ж саму точку мембрани. Тому виконується

$$u(r, \varphi, t) = u(r, \varphi + 2\pi, t) \qquad (5.15)$$

2) Функція $u(r, \varphi, t)$) обмежена при всіх значеннях радіусу r, оскільки фізично можливі тільки такі коливан-

ня цілісної круглої обмеженої мембрани. Це виключає функції Неймана із загального розв'язку, оскільки розв'язок не зазнає розривів (мембрана цілісна та закріплена).

3) Функція стає нулем на границі мембрани.

З умови періодичності виходить, що індекс функцій Беселя може бути тільки цілими числами, інакше функція розв'язку не матиме періоду 2π по φ.

$\lambda = n^2 \geqslant 0$, де n — цілі ненегативні числа

$$u(r, \varphi, t) = \left(a_1 \cos(kct) + a_2 \sin(kct)\right) \bullet$$
$$\left(a_3 \cos(n\varphi) + a_4 \sin(n\varphi)\right) J_n(kr) \qquad (5.15)$$

Краєвій умові на границі мембрани можна задовольнити, вимагаючи виконання умови

$J_n(kr_0) = 0$ і отримавши з цього відношення k.

Очевидно, що дане рівняння по k має безкінечну множину рішень, при яких kr_0 повинно приймати значення коренів функції Беселя. Раніше ми показали, що функції Беселя мають безкінечно багато нулів, тому розв'язків загального рівняння безкінечна множина.

Позначивши безкінечну множину нулів функції Беселя як $\lambda_m^{(n)}$ ми отримаємо, що k може приймати тільки значення $k = \lambda_m^{(n)} / r_0$ де $m = 1, 2, 3 \ldots$ та n — індекс.

Для того, щоб задовольнити загальним початковим умовам, потрібно використовувати лінійні комбінації всіх можливих розв'язків при всіх допустимих значеннях встановлених параметрів, або іншими словами — узагальнені ряди вищезгаданих функцій (5.15).

Коливання мембрани буде результатом накладення гармонійних коливань, відповідних функціям $u_m^{(n)}$

Це можна записати у вигляді подвійного ряду:

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(n)}(r, \varphi, t) \qquad (5.16)$$

де $\lambda_m^{(n)}$ — нулі функції Беселя $J_n(x) = 0$

$k_m^{(n)} = \lambda_m^{(n)} / r_0$ і виконується наступна рівність:

$$u_m^{(n)}(r,\varphi,t)=\left(a_{m1}^{(n)}\cos(k_m^{(n)}ct)+a_{m2}^{(n)}\sin(k_m^{(n)}ct)\right)\bullet$$

$$\left(a_{m3}^{(n)}\cos(n\varphi)+a_{m4}^{(n)}\sin(n\varphi)\right)J_n(k_m^{(n)}r) \qquad (5.17)$$

Кожна з цих функцій описує одне з можливих коливань мембрани. При фіксованому значенні радіусу r кожна з цих функцій не залежить від кута φ і міняється тільки разом із змінній r з амплітудою

$$\mathcal{R}_m^{(0)}(r) = |J_0(k_m^{(0)}r)a_{m3}^{(0)}|\left(\left(a_{m1}^{(0)}\right)^2+\left(a_{m2}^{(0)}\right)^2\right)^{1/2}$$

і частотою $c\lambda_m^{(0)}/r_0 = ck_m^{(0)}$ при $n=0$

Поблизу границі мембрани коливання незначні та наближаються до нуля, в той же час досягаючи свого максимуму в центрі мембрани. Можна виділити в мембрані кільцеві області, які не беруть участь в коливаннях, залишаючись в спокої (так звані вузлові лінії).

У разі ненульового індексу n функції (5.17) описують гармонійні коливання, амплітуда яких залежить від кута φ й змінюється при фіксованому значенні радіусу r по синусоїдальному закону.

Кожна з функцій (5.17) представляє можливі коливання мембрани, з яких потрібно вибрати ті, що матимуть місце в конкретній задачі з конкретно вказаними і заданими краєвими умовами.

Слід відзначити, що на практиці найбільше значення мають тільки перші члени ряду (5.16), оскільки при зростанні значень параметрів n і m значення функцій (5.17) швидко наближаються до нуля.

І хоча теоретично рішення хвилевого рівняння є результатом накладення безкінечної множини коливань із різними частотами і амплітудами, практично істотну роль відіграють тільки коливання, які відповідають початковим членам ряду (5.16).

Це робить надзвичайно зручним із практичної точки зору застосування функцій Беселя з цілочисельними індексами для отримання розв'язків хвильового рівняння із заданими краєвими умовами чисельними методами і використанням програм та комп'ютерних розрахунків, що знайшло свій розвиток з середини XX століття.

У більш загальному випадку можна сказати, що функції Беселя, задані наступним відношенням

$$J_\nu(\lambda_m^{(\nu)}x) \quad \text{де } \lambda_m^{(\nu)} \text{ — корені цієї функції} \qquad (5.18)$$

утворюють повну ортогональну систему функцій, яка дозволяє представляти різні аналітичні функції у вигляді безкінечних рядів. Якщо функція $f(r)$ безперервна і двічі диференціюється на заданому на інтервалі $(0,\ r_0)$, вона може бути представлена у вигляді наступного ряду, що сходиться:

$$f(r)=\sum_{m=1}^{\infty} c_m^{(\nu)}J_\nu(\lambda_m^{(\nu)}r/r_0) \qquad (5.19)$$

Функції (5.18) утворюють ортогональну систему на заданому інтервалі з вагою r при цілих значеннях індексу. Це витікає із загальної теорії лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Це означає, що

$$\int_0^{r_0} J_n(\lambda_m^{(n)}r/r_0)\ J_n(\lambda_k^{(n)}r/r_0)r\ dr=0 \quad m\neq k \qquad (5.20)$$

Обчислимо норму власних функцій (5.19) при цілих ненегативних значеннях індексу. Позначимо

$$P(r) = J_n(\lambda_m^{(n)}r/r_0) \quad \text{де} \quad k_m = \lambda_m^{(n)}/r_0 \qquad (5.21)$$

$$R(r) = J_n(kr) \quad \text{де } k \text{ — довільний параметр.}$$

Ці функції задовольняють парі рівнянь вигляду:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dP}{dr}\right)+\left(k_m^2r-\dfrac{n^2}{r}\right)P(r) = 0 \\ \dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)+\left(k^2r-\dfrac{n^2}{r}\right)R(r) = 0 \end{array}\right.$$

При цьому перша функція $P(r_0)=0$, а друга вже не задовольняє цій умові. Помножимо перше рівняння на $R(r)$, а друге на $P(r)$ і віднімемо друге рівняння з першого, проінтегрувавши потім по r в межах даного інтервалу. Таким чином, ми отримаємо:

$$\int_0^{r_0} rP(r)R(r)dr = -\frac{r_0 J_n(kr_0)k_m J_n'(k_m r_0)}{k_m^2 - k^2}$$

Перейдемо до границі $k \to k_m$

Для цього розкриємо невизначеність в правій частині за правилом Лопіталя, одночасно продиференціювавши чисельник і знаменник по k і після цього виконавши граничний перехід, ми отримаємо квадрат норми

$$\|J_n(k_m r)\|^2 = \int_0^{r_0} r J_n^2(\lambda_m^{(n)} \; r/r_0)\,dr = \frac{r_0^2}{2}\left(J_n'(\lambda_m^{(n)})\right)^2 \tag{5.22}$$

Якщо ми перейдемо до границі $k \to k_k$, то отримаємо умову ортогональності (5.20).

Виходячи з рекурентних відношень функцій Беселя, для функцій Беселя нульового індексу можна записати наступне значення норми:

$$\|J_0(k_m r)\|^2 = \frac{r_0^2}{2}\left(J_1(\lambda_m^{(0)})\right)^2 \tag{5.23}$$

Доведена наступна теорема розкладності: всяка функція, що двічі диференціюється, обмежена при $r=0$ і що стає нулем при $r=r_0$, може бути розкладена в абсолютно і ряд, що рівномірно сходиться

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m^{(n)} J_n(\lambda_m^{(n)} \; r/r_0) \tag{5.24}$$

де $c_m^{(n)} = \int_0^{r_0} r\, f(r)\, J_n(\lambda_m^{(n)} r/r_0)\,dr \Big/ \|J_n(k_m r)\|^2$

У ряді задач доводиться стикатися з розкладеннями не тільки по обмежених функціях Беселя, але і по функціях Неймана з особливостями в нулі, а також їх похідних. В цьому випадку при використанні чисельних методів необхідно виключати з обчислень малий окіл границі, де функції Неймана мають неусувну особливість і наближаються до безкінечності.

Як видно з вищесказаного, велике практичне значення має отримання нулів функції Беселя програмним способом. За наявності програми обчислень значень функції Беселя завдання відшукання її коренів не представляє складності — вона стандартна.

Завдання полегшує той факт, що при наближенні до безкінечності інтервал між коренями наближається до π. Це дозволяє пропустити частину проміжних обчислень і перескакувати від кореня до кореня.

Для пошуку коренів програмним методом необхідно проводити покрокові обчислення значень функції Беселя до тих пір, поки на черговому кроці значення функції не поміняє знак. Між цими двома значеннями змінної й опиниться корінь функції Беселя. При малій долі ймовірності в процесі ітерацій корінь функції Беселя може бути отриманий і явно, що враховується.

Нехай $x_1 x_2 \ldots \; x_k$ — покрокові ітерації

й $J_k = J_\nu(x_k)$ — отримане значення функції Беселя на до ітерації k. Як тільки ми отримаємо, що

$J_{k-1} < 0$ и $J_k > 0$ або $J_{k-1} > 0$ й $J_k < 0$

це означає, що між x_{k-1} та x_k знаходиться корінь

$$\lambda_m^{(\nu)} \approx x_{k-1} + \frac{|J_{k-1}|\,(x_k - x_{k-1})}{|J_{k-1}| + |J_k|} \tag{5.25}$$

Обчислення значень функції Беселя потрібно проводити з максимально високою для 32-розрядних програм точністю — 1E-12. Величину кроку досить призначати в межах 1E-6 — 1E-12, що дозволить отримати оптимальні результати.

Після знаходження кореня проводимо зсув змінної x на величину, кратну кроку ітерації, але менше π, наприклад, від 3 до 3.1 — це прискорить роботу програми. На сучасних комп'ютерах обчислення проводяться дуже швидко, таблицю перших коренів функцій Беселя можна отримати протягом лічених секунд. Програму обчислення перших коренів функцій Беселя можна безкоштовно скачати з веб-сайту автора-розробника.

У Висновку приведемо інтегральні представлення циліндрових функцій без доказу.

$$J_n(x) = \int_0^\pi \cos\left(n\theta - x\sin\theta\right) d\theta \qquad (5.26)$$

$$J_{2n}(x) = \int_0^\pi \cos 2n\theta \; \cos\left(x\sin\theta\right) d\theta \qquad (5.27)$$

$$J_{2n+1}(x) = \int_0^\pi \sin(2n+1)\theta \; \sin\left(x\sin\theta\right) d\theta \qquad (5.28)$$

Позначимо $c = \dfrac{(x/2)^{\nu}}{\Gamma(1/2+\nu)\,\Gamma(1/2)}$ й $\nu > -1/2$

$$J_\nu(x) = c\int_0^\pi \sin^{2\nu}\theta \cos\left(x\cos\theta\right) d\theta \qquad (5.29)$$

$$J_\nu(x) = c\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2\nu}\theta \cos\left(x\sin\theta\right) d\theta \qquad (5.30)$$

$$J_\nu(x) = c\int_{-1}^{1} \left(1-\theta^2\right)^{\nu-1/2} \cos x\theta \; d\theta \qquad (5.31)$$

Позначимо $s = \dfrac{(x/2)^{-\nu}}{\Gamma(1/2-\nu)\,\Gamma(1/2)}$

$$\mathcal{N}_\nu(x) = 2c\Big(\int_0^{\pi/2} \cos^{2\nu}\theta \sin\left(x\sin\theta\right) d\theta -$$

$$- \int_0^\infty \exp\left(-x\,\mathrm{sh}\,\theta\right) \mathrm{ch}^{2\nu}\theta \; d\theta\Big) \qquad (5.32)$$

$$\mathcal{N}_\nu(x) = -2s\int_1^\infty \left(1-\theta^2\right)^{-\nu-1/2} \cos x\theta \; d\theta \qquad (5.33)$$

$$-1/2 < \nu < 1/2$$

Існують й інші інтегральні представлення циліндрових функцій, що виражають інтегральні залежності між різними спеціальними функціями. Вони дуже рідко застосовуються в чисельних методах.

Окрім циліндрових функцій і функцій Беселя, в прикладній математиці та математичній фізиці існує широкий клас спеціальних функцій — ортогональні поліноми та інші функції, що виникають при використанні різних систем координат.

Метод розділення змінних в диференціальних рівняннях в частинних похідних може приводити до ширшого класу спеціальних функцій, для представлення яких також використовуються рекурентні відношення. Причому для кожного класу функцій рекурентні відношення виводяться, виходячи з кінцевого їх подавання, я не із загального виду самого рівняння.

Одне із загальних рівнянь для простих спеціальних функцій може бути записано у вигляді:

$$\mathcal{L}y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0 \qquad (5.34)$$

$$\mathcal{L}y(x) = \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy(x)}{dx}\right) - g(x)y(x)$$

$$a < x < b, \quad \rho(x) > 0, \quad k(x),\ g(x) \geqslant 0$$

Простіша краєва задача визначає тригонометричні функції. Окремим випадком узагальненої задачі (5.34) є розглянуті в цьому розділі циліндрові функції — функції Беселя, Неймана та ін.

При інших значеннях параметрів можна отримати рівняння Лежандра, рівняння приєднаних функцій Лежандра, рівняння Чебишева-Ерміта і рівняння Чебишева-Лягерра. Характерною особливістю вказаних рівнянь і краєвих задач є перетворення на нуль коефіцієнта $k(x)$ принаймні, на одному з кінців інтервалу (a, b). Ця властість відіграє важливу роль для постановки краєвих задач рівняння (5.34).

Крім вказаного вище, існує загальний клас спеціальних функцій, рекурентні відношення для яких можна отримати методом рекурентних відношень тільки на підставі загального виду рівняння. Для цього потрібно скористатися Другою базовою теоремою, яка узагальнює результати Першої базової теореми, розглядаючи рівняння зокрема з нульовими власними значеннями.

Суть Другої базової теореми полягає в наступному. Розглянемо рівняння Штурма-Ліувіля в загальному вигляді з довільним або нульовим власним значенням:

$$y''(x)+g(x)y(x)=0 \tag{5.35}$$

існує наступна заміна вигляду:

$$z(x)=A(x)y(x)+B(x)y'(x) \tag{5.36}$$

яка переводить рівняння (5.25) в рівняння

$$z''(x)+q(x)z(x)=0 \tag{5.37}$$

якщо виконані наступні умови:

$$\begin{gathered} q(x)A(x)=-A''(x)+g(x)A(x)+ \\ +2g(x)B'(x)+g'(x)B(x) \\ q(x)B(x)=-2A'(x)-B''(x)+g(x)B(x) \end{gathered} \tag{5.38}$$

Крім того, існує така константа μ і функція, позначена $\varphi(x)$, що виконуються наступні умови:

$$\frac{A(x)}{B(x)}=-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \tag{5.39}$$

$$\varphi''(x)+\left(g(x)-\mu/B^2(x)\right)\varphi(x)=0 \tag{5.40}$$

де $\mu=const\neq 0$ (невироджена)

$$\left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)^2-\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)=-g(x)+\frac{\mu}{B^2(x)} \tag{5.41}$$

Як було показано в Першій базовій теоремі, якщо в рівнянні (5.35) вдається виділити ненульове власне значення, завдання пошуку рекурентних відношень помітно полегшується, оскільки потенціал заміни при першій похідній обертається в тотожну константу.

Всі запропоновані формули фактично були отримані при доведенні Першої базової теореми, яка є окремим випадком узагальненої Другої базової теореми. Вказані відношення описують загальні залежності, що виникають при побудові рекурентних відношень для розв'язків

рівняння Штурма-Ліувіля, на підставі чого можуть бути отримані рекурентні відношення для ширшого класу задач лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Замість того, щоб намагатися вирішити нерозв'язну задачу — знайти наближення розв'язок рівняння Штурма-Ліувіля для нульових власних значень, використовуючи ненульові власні значення, авторові вдалося отримати прямі формули, які забезпечують розв'язання узагальненої задачі побудови рекурентних відношень.

Незважаючи на вдавану громіздкість, виведені відношення дуже зручні для практичного застосування, оскільки зазвичай пошуки рекурентних залежностей ведуться в певному строго вузькому класі задач.

Для практичного застосування формул часто доводиться використовувати метод невизначених коефіцієнтів, який дозволяє легко виписувати рекурентні залежності для найширшого круга практичних задач.

Приклади практичного застосування запропонованого методу рекурентних відношень для узагальненої задачі Штурма-Ліувіля й довільних власних значень рівняння будуть показані в наступному розділі та в наступному виданні, яке випускається частинами.

Узагальнена Друга базова теорема дуже зручна для узагальненого дослідження окремих класів спеціальних функцій, зокрема ортогональних поліномів, які вдалося систематизувати на основі запропонованого підходу — узагальненого методу рекурентних відношень.

Всі рекурентні відношення на підставі запропонованого методу виводяться безпосередньо, виходячи суто із загального виду початкового лінійного диференціального рівняння другого порядку з довільними власними значеннями, як нульовими, так і ненульовими.

Автор вважає запропонований метод прогресивним і таким, що дозволяє працювати не тільки із спеціальними функціями, але й отримувати аналітичні розв'язки складних диференціальних рівнянь другого порядку на основі добре досліджених диференціальних рівнянь і рекурентних відношень для їх рішень. У цьому виданні запропонований новаторський підхід був застосований до циліндрових функцій — функцій Беселя і Неймана.

В кінці XIX - на початку XX століття на всіх математичних факультетах університетів вивчення спеціальних функцій в теорії було обов'язковим, їм приділялася значна увага. Для їх позначення застосовувалися особливі начертання букв і символів, що підкреслювало їх унікальність і особливу важливість в прикладній математиці.

З середини XX століття основний акцент перемістився на комп'ютерне програмне обчислення значень спеціальних функцій та їх застосування для моделювання конкретних процесів в прикладних завданнях. Спеціальні функції втратили особливе шрифтове начертання, що підкреслювало в книгах та інших друкарських виданнях їх індивідуальність і виділяло їх із загальної маси.

Серед учених розповсюдилася хибна думка, ніби то в теорії спеціальних функцій неможливо сказати нове слово, що ця теорія нібито є теоретично закінченою, хоч й не структурованою і не систематизованою.

Автор бажає повернути інтерес дослідників до теоретичного апарату спеціальних функцій і проблеми систематизації і узагальнення властивостей цих функцій, а також знайти шляхи нетривіального застосування цього могутнього теоретичного і практичного апарату.

Автор також намагалася дотримати розумний баланс між теорією і практичним застосуванням цього апарату для сьогоднішніх реалій.

У Висновковому розділі також хочеться сказати про необхідність відродження фундаментальних і наукових досліджень, зокрема в області прикладної математики і математичної фізики.

Останнє десятиліття XX століття було дуже складним і проблемним для фундаментальної і прикладної науки і вчених країн колишнього СРСР, для вітчизняної науки воно обернулося реальною катастрофою.

Тільки з України за рубіж на постійне мешкання виїхало більше вчених, науковців і фахівців, ніж із будь-якої іншої європейської держави (за винятком Росії). Трагедія полягала в тому, що далеко не всі з тих, хто виїхав за рубіж, дійсно потім знайшли себе у сфері освіти, наукової і науково-практичної роботи.

Фундаментальна наука української держави, яка витратила колосальні кошти на підготовку і навчання

фахівців, що по рівню підготовки не поступаються фахівцям світового рівня, а то й перевершують їх за якістю теоретичної підготовки і практичного досвіду роботи, виявилася в буквальному розумінні знекровлена.

Більшість досліджень були припинені, а креативна робота молодих учених взагалі не підтримувалася і не заохочувалася ні матеріально, ні морально — більш того, йшло справжнє полювання за новими ідеями. Хочеться висловити **подяку тим практикам, які використовували спеціальні функції в своїх розрахунках** і приділяли багато уваги цим питанням навіть в такий важкий період.

Але навіть ці деструктивні процеси були не в змозі стримати політ науково-технічної думки і зупинити фундаментальні та науково-практичні дослідження тих, хто є справжнім прихильником науки і не представляє своє життя без наукових досліджень. Важко зупинити тих, у кого устрімлення до науково-технічного прогресу закладене в самій душі та свідомості.

Ми — нове покоління науково-технічної революції та діти науково-технічного прогресу. На наших очах комп'ютерні технології зробили колосальний крок вперед, комп'ютери перетворилися з одиничних величезних машин, які займали цілі зали, в компактний, доступний і дуже популярний робочий інструмент. Була створена глобальна світова бібліотека і мережа світового обміну інформацією — Інтернет. Сьогодні багато хто не представляє своє життя без цифрових технологій, основи яких були закладені вченими попередніх поколінь.

Тільки від нас самих залежить, бути сучасній українській науці або не бути. Тільки ми самі зможемо рухати вперед науково-технічний прогрес, продовжувати фундаментальні дослідження і науково-практичні дослідження. Ми живемо в епоху, про яку марили і мріяли прогресивні учені XX століття.

Наукові та цифрові технології буквально перевернули все сучасне життя. Математика проникла у всі сфери і галузі людського життя. Сьогодні такі дисципліни, як фізика і географія, хімія і біологія, економіка і навіть політика не можуть існувати без реального застосування математичного апарату.

Давайте не забувати, що все на цьому світі навколо нас — це прикладна математика та числа ...

П р о   а в т о р а

На сьогодні основна професія автора видання — професійний веб-дизайн і поліграфічні технології. Закінчила механіко-математичний факультет Харківського Національного університету ім. В. М. Каразіна (відділення прикладної математики, кафедра математичної фізики) в 1994 році та захистила диплом за даною темою.

Проблемами спеціальних функцій займається з 1991 року. Пряме виведення рекурентних відношень для функцій Беселя і Неймана було отримане автором в 1992 році. У 1993 році була розроблена узагальнена теорема, яка дозволяє отримати рекурентні відношення в загальному випадку.

Пошуки і теоретичні дослідження в області спеціальних функцій математичної фізики продовжувалися і після закінчення університету до 1999 року, та після перерви вони були відновлені в 2007 році.

С 1993 року автор професійно займається представницькою поліграфією, комп'ютерною версткою і створенням оригінал-макетів різної складності, а також журналістикою в комп'ютерній галузі та в Інтернеті.

З 1999 року професійно займається інтернет-програмуванням, веб-дизайном і написанням клієнтських сценаріїв на мові JavaScript для сайтів і веб-сторінок.

У 2007 році автор відновила роботу над спеціальними функціями математичної фізики, використовуючи для цього сучасний апарат мови JavaScript. Дана мова дозволяє реалізувати алгоритмічний апарат чисельних методів для стандартних персональних комп'ютерів в стандартних 32-розрядних інтернет-програмах (браузерах). Такий підхід на сьогодні є новаторським. Програми можна скачати з інтернет-сайту автора-розробника.

Метою цього видання є не тільки пропаганда сучасних методів та підходів до теорії та практики спеціальних функцій математичної фізики, але й пошук однодумців, кому небайдужі дослідження в області лінійних диференціальних рівнянь другого порядку, спеціальних функцій матфізики і використання сучасного програмного забезпечення для реалізації чисельних методів математичної фізики.

Найбільший інтерес для автора представляє теоретичне дослідження та математичне моделювання аномальних і екстраординарних природних і техногенних процесів.

Спеціальні функції математичної фізики

Частина 1А. Функції Беселя і циліндрові функції в елементарному викладенні з програмами обчислень

Юлия Викторовна Кафтанова

Специальные функции математической физики
Издание осуществляется в трех частях

Часть 1. Функции Бесселя и цилиндрические функции в элементарном изложении с программами вычислений

Часть 2. Ортогональные полиномы и другие сферические функции в элементарном изложении с программами вычислений

Части 1 и 2 рассчитаны на специалистов, инженеров и математиков. В них строго излагается авторский метод рекуррентных отношений для специальных функций математической физики и особенности их применения на практике.

Часть 3. Моделирование аномальных и экстраординарных природных и техногенных процессов

Часть 3 носит научно-популярный характер и рассчитана в первую очередь на нематематиков. Она написана понятным языком и рассказывает о таких явлениях, как движущиеся камни в Долине Смерти, цунами, волны-убийцы, землетрясения, торнадо, смерчи и шквалы в атмосфере с точки зрения матфизики.

Для профессиональных музыкантов и любителей современной музыки строится математическая модель звучания современной постхендриксовской электрогитары.

К части 3 бесплатно прилагается компакт-диск с цветными компьютерными иллюстрациями, фотографиями и видеоматериалами очевидцев.

Юлія Вікторівна Кафтанова

Спеціальні функції математичної фізики

Частина 1А. Функції Беселя і циліндрові функції в елементарному викладенні з програмами обчислення

ЧП Издательство «Новое слово», Харьков
Редактор выпуска: Антон Анатольевич Кафтанов
Дизайн обложки и компьютерная верстка: Ю.В. Кафтанова
Для писем: Кафтанова Ю.В., а/я 10911, Харьков, 61003, Украина
Наши электронные адреса: www.ois.org.ua, www.mat.net.ua
E-mail: webois@bk.ru, korum68@bk.ru

ISBN 978-966-2046-62-5

9 789662 046625

Печать обложки: типография «Планета Принт»
Сдано в набор 28.08.2007. Подписано в печать 05.01.2009.
Формат 84x118 1/32. Бумага офсетная. Печать лазерная.
Гарнитура “Ukrainian Journal”. Усл. авт. л. 7,16.
Тираж 500 экз.

ISBN 978-966-2046-62-5

У частині 1 наводиться застосування методу рекурентних відношень, який дозволяє отримати рекурентні відношення для функцій Бесселя і описати різні властивості циліндрових функцій найбільш коротким та простим способом, виходячи тільки із загального виду рівняння Бесселя. Також приводяться розроблені автором програми обчислень циліндрових функцій на мові JavaScript.